



Fakultät für Mathematik

# Diplomarbeit

$(0, \lambda)$ -Graphen

Tobias Brunsch

Chemnitz, 27. April 2010

**Betreuer:** Prof. Dr. Christoph Helmberg  
Dr. Frank Göring

**Tobias Brunsch**

$(0, \lambda)$ -Graphen

Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik

Technische Universität Chemnitz, April 2010

# Danksagung

Ich danke

- Herrn Prof. Dr. Helmberg für die Betreuung und Unterstützung bei der Diplomarbeit,
- Herrn Dr. Göring für die fruchtbaren Diskussionen und die vielen guten Ideen, die maßgeblich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben,
- der gesamten Arbeitsgruppe der Professur Algorithmische und Diskrete Mathematik, die mich herzlich aufgenommen hat und denen ich stets über den Fortschritt meiner Arbeit berichten durfte, und nicht zuletzt
- meinen Eltern und meiner Freundin, die mich während der gesamten Zeit motiviert und mir gegenüber viel Verständnis aufgebracht haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Begriffe</b>	<b>8</b>
2.1	Würfelgraphen und ihre Verallgemeinerungen . . . . .	9
2.2	Eigenschaften von $(0, \lambda)$ -Graphen . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Planare <math>(0, \lambda)</math>-Graphen</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Konstruktion von <math>(0, 2)</math>-Graphen</b>	<b>19</b>
4.1	Das bipartite Doppelte eines Graphen . . . . .	19
4.2	Das Kartesische Produkt zweier Graphen . . . . .	22
4.3	Faktorgraphen . . . . .	26
4.3.1	Faktorgraphen von $(0, \lambda)$ -Graphen . . . . .	26
4.3.2	Faktorgraphen von Würfelgraphen . . . . .	33
4.4	Kantenadditionen in $(0, 2)$ -Graphen . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Der Common Neighbour Graph eines Graphen</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>3-Färbungen von <math>(0, 2)</math>-Graphen</b>	<b>54</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>56</b>

# 1 Einleitung

Ein wichtiges Problem der Graphentheorie ist das Färbbarkeitsproblem: Kann man die Knoten eines Graphen  $G$  mit einer gegebenen Anzahl  $k$  an Farben so färben, dass Knoten gleicher Farbe nicht durch eine Kante verbunden sind? Eine solche Färbung heißt *zulässige  $k$ -Färbung* von  $G$  und  $G$  heißt  *$k$ -färbbar*. In dieser Arbeit nennen wir eine zulässige Färbung kurz eine *Färbung*, da andere Färbungen für uns nicht von Interesse sind. Die *chromatische Zahl*  $\chi(G)$  eines Graphen  $G$  ist die kleinste Zahl  $k$ , für die  $G$   $k$ -färbbar ist.

Für manche Klassen von Graphen kann man die chromatische Zahl relativ einfach bestimmen. So ist zum Beispiel leicht zu zeigen, dass die chromatische Zahl sogenannter *Würfelgraphen*<sup>1</sup> gleich 2 ist. Für diese Graphen wurden verschiedene Verallgemeinerungen eingeführt. Eine Oberklasse bilden die *Distanzgraphen*<sup>1</sup>, die durch Lovász wiederum zu den sogenannten *würfelähnlichen Graphen*<sup>1</sup> verallgemeinert wurden ([Lov75]). Diese Graphen sind auf derselben Knotenmenge wie Würfelgraphen definiert, aber die Kantenmenge ist von bestimmten Parametern abhängig.

Eine ganz andere Verallgemeinerung stellte Mulder vor ([Mul79]). Bei den sogenannten  *$(0, 2)$ -Graphen*<sup>1</sup> ist die Knotenmenge nicht mehr vorgegeben. Stattdessen werden zusätzliche Bedingungen an den Graphen gestellt, insbesondere an die gemeinsame Nachbarschaft von je zwei verschiedenen Knoten des Graphen.

Einige Jahre lang vermutete man, dass die chromatische Zahl würfelähnlicher Graphen eine Zweierpotenz ist. Im Jahr 1990 konnte Payan jedoch einen 7-chromatischen würfelähnlichen Graphen konstruieren. Gleichzeitig zeigte er aber, dass würfelähnliche Graphen zumindest nicht 3-chromatisch sein können. Daher vermutete er, dass dies auch für endliche<sup>2</sup>  $(0, 2)$ -Graphen gilt ([Pay92]). Seine Vermutung wird zusätz-

---

<sup>1</sup>Diese Begriffe werden in Abschnitt 2.1 eingeführt.

<sup>2</sup>In Abschnitt 2.1 diskutieren wir, warum wir uns auf endliche Graphen beschränken.

lich gestützt von der Tatsache, dass bisher nur 1, 2, 4 und 5 als chromatische Zahlen von endlichen  $(0, 2)$ -Graphen bekannt sind.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Payans Vermutung. Wir beweisen sie für endliche planare  $(0, 2)$ -Graphen. Wir werden jedoch sehen, dass diese nur eine kleine Klasse von Graphen bilden. Darüber hinaus beschäftigen wir uns mit der lokalen Struktur endlicher  $(0, 2)$ -Graphen und Eigenschaften von 3-Färbungen solcher Graphen. Als wesentliches Resultat in diesem Zusammenhang sei zu nennen, dass alle 3-färbbaren endlichen  $(0, 2)$ -Graphen sogenannte *Rektagraphen* sind, das heißt sie enthalten kein Dreieck.

Da es ein starkes Indiz gibt, dass Gegenbeispiele zu Payans Vermutung existieren<sup>3</sup>, besteht der Hauptteil der Arbeit in der Erarbeitung von Ideen zur Konstruktion solcher Beispiele.

---

<sup>3</sup>Wir erläutern dieses Indiz ebenfalls in Abschnitt 2.1.

## 2 Grundlegende Begriffe

Nach einer kurzen Einführung der graphentheoretischen Grundbegriffe und Notationen stellen wir Würfelgraphen und ihre in der Einleitung genannten Verallgemeinerungen vor.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit *einfachen, ungerichteten Graphen*, kurz *Graphen*. Dies sind Paare  $G = (V(G), E(G))$ , wobei  $V(G)$  aus einer beliebigen Urmenge stammt, also einer Menge von Elementen ohne innere Struktur, und  $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2} := \{\{u, v\} : u \neq v \in V(G)\}$  eine beliebige Menge von zweielementigen Teilmengen von  $V(G)$  ist. Wir bezeichnen die Mengen  $V(G)$  und  $E(G)$  als *Knotenbeziehungsweise Kantenmenge*. Die Knoten eines Graphen symbolisieren wir in Darstellungen als kleine Kreise, die Kanten als Linien, meist Strecken. Ein Graph heißt *endlich*, wenn seine Knotenmenge endlich ist. Ansonsten heißt er *unendlich*.

Zwei Knoten  $u \neq v$  eines Graphen  $G$  heißen *Nachbarn* oder *benachbart*, falls sie durch eine Kante miteinander verbunden sind, das heißt es gilt  $\{u, v\} \in E(G)$ . Mit  $N_G(v)$  bezeichnen wir die *Nachbarschaft* von  $v$  in  $G$ , also die Menge der Nachbarn von  $v$ , mit  $N_G[v] := N_G(v) \cup \{v\}$  die *abgeschlossene Nachbarschaft* von  $v$  in  $G$ . Der *Grad* oder die *Valenz* eines Knotens  $v$  ist definiert durch  $d_G(v) := |N_G(v)|$ . Haben alle Knoten eines Graphen denselben Grad  $d$ , so heißt der Graph *d-regulär* oder einfach nur *regulär*.

Das Tupel  $(u_0, u_1, \dots, u_l)$  nicht notwendig paarweise verschiedener Knoten  $u_0, \dots, u_l$  heißt *Weg der Länge  $l$*  von  $u_0$  nach  $u_l$  in  $G$ , sofern die Mengen  $\{u_{i-1}, u_i\}$  für alle  $i = 1, \dots, l$  Kanten von  $G$  sind. Gilt  $u_l = u_0$ , so nennen wir das Tupel  $(u_0, \dots, u_l)$  *Kreis der Länge  $l$*  in  $G$ . Gibt es in  $G$  zwischen je zwei verschiedenen Knoten  $u$  und  $v$  einen Weg von  $u$  nach  $v$ , so heißt  $G$  *zusammenhängend*. Mit  $d_G(u, v)$  bezeichnen wir den *Abstand* zweier Knoten  $u$  und  $v$  in  $G$ , also die Anzahl an Kanten eines kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$  in  $G$ . Das Maximum aller Abstände  $d_G(u, v)$ , betrachtet über alle Knoten  $u$  und  $v$  von  $G$ , heißt *Durchmesser* von  $G$ , symbolisch  $\text{diam}(G)$ .

## 2.1 Würfelgraphen und ihre Verallgemeinerungen

Für eine Menge  $U \subseteq V(G)$  bezeichne  $G[U]$  den *durch  $U$  induzierten Untergraphen* von  $G$ , definiert durch  $V(G[U]) := U$  und  $E(G[U]) := \{\{u, v\} \in E(G) : u, v \in U\}$ . Ist  $E(G[U]) = \emptyset$ , so nennen wir  $U$  eine *stabile* Menge in  $G$ . Ein Graph  $H$  mit  $V(H) = U$  und  $E(H) \subseteq E(G[U])$  heißt *Untergraph* von  $G$ , symbolisch  $H \subseteq G$ . Für zwei Mengen  $U, W \subseteq V(G)$  ist  $E(U, W) := \{\{u, w\} : u \in U, w \in W, \{u, w\} \in E(G)\}$  die Menge der Kanten von  $G$  mit einem Knoten in  $U$  und dem anderen in  $W$ . Die *Vereinigung*  $G_1 \cup G_2$  zweier Graphen  $G_1$  und  $G_2$  ist definiert durch  $V(G_1 \cup G_2) := V(G_1) \cup V(G_2)$  und  $E(G_1 \cup G_2) := E(G_1) \cup E(G_2)$ . Sind die Knotenmengen von  $G_1$  und  $G_2$  disjunkt, so verdeutlichen wir das mit der Schreibweise  $G_1 \cup G_2$ .

## 2.1 Würfelgraphen und ihre Verallgemeinerungen

**Definition 1 (Würfelgraph  $Q_n$ ):** Für eine natürliche Zahl  $n$  ist der Würfelgraph  $Q_n$  definiert durch  $V(Q_n) := \{0, 1\}^n$  und  $E(Q_n) := \{\{u, v\} : d_H(u, v) = 1\}$ . Dabei ist  $d_H$  der Hamming-Abstand zweier 0-1-Vektoren gleicher Länge und zählt die Positionen, in denen sie sich unterscheiden (vgl. [Ham50]).

Wie bereits erwähnt, sind alle Würfelgraphen 2-chromatisch: Offenbar ist die Abbildung  $\chi: V(Q_n) \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\chi(v) := d_H(0, v) \bmod 2$  eine 2-Färbung von  $Q_n$ .

Zu einem gegebenen Graphen können wir einen Graphen auf derselben Knotenmenge definieren, bei dem wir alle Paare von Knoten verbinden, die einen gewissen Abstand voneinander haben.

**Definition 2 (Distanzgraph  $Q_n[d_1, \dots, d_l]$ ):** Für eine natürliche Zahl  $n$  und eine Menge  $\{d_1, \dots, d_l\}$  natürlicher Zahlen ist der Distanzgraph  $Q_n[d_1, \dots, d_l]$  definiert durch  $V(Q_n[d_1, \dots, d_l]) := \{0, 1\}^n$  und  $E(Q_n[d_1, \dots, d_l]) := \{\{u, v\} : d_H(u, v) \in \{d_1, \dots, d_l\}\}$ .

Distanzgraphen stellen eine Verallgemeinerung von Würfelgraphen dar und wurden selbst wieder verallgemeinert.

**Definition 3 (Würfelähnlicher Graph  $Q_n(S)$ )** (vgl. [Lov75]): Für eine natürliche Zahl  $n$  und eine Menge  $S \subseteq \{0, 1\}^n \setminus \{0\}$  ist der würfelähnliche Graph  $Q_n(S)$

## 2 Grundlegende Begriffe

definiert durch  $V(Q_n(S)) := \{0, 1\}^n$  und  $E(Q_n(S)) := \{\{u, v\} : u \oplus v \in S\}$ . Dabei ist  $u \oplus v := (u_1 \oplus v_1, \dots, u_n \oplus v_n)$  die komponentenweise XOR-Operation, angewendet auf die 0-1-Vektoren  $u$  und  $v$ .

Wie man sich leicht überlegt, lässt sich zu gegebenen natürlichen Zahlen  $d_1, \dots, d_l$  eine Menge  $S \subseteq \{0, 1\}^n \setminus \{0\}$  angeben, sodass  $Q_n[d_1, \dots, d_l] = Q_n(S)$  gilt. Dazu wählt man  $S = \{v : d_H(0, v) \in \{d_1, \dots, d_l\}\}$ .

Eine andere Verallgemeinerung von Würfelgraphen sind die  $(0, 2)$ -Graphen, die wir in etwas allgemeinerer Form definieren wollen.

**Definition 4 ((0,  $\lambda$ )-Graph)** (vgl. [Mul79]): Sei  $\lambda \geq 2$  eine natürliche Zahl. Ein  $(0, \lambda)$ -Graph ist ein zusammenhängender Graph, in dem je zwei verschiedene Knoten genau 0 oder  $\lambda$  gemeinsame Nachbarn besitzen.

Offenbar sind Würfelgraphen  $(0, 2)$ -Graphen. Zwei Knoten  $u \neq v$  von  $Q_n$  haben genau dann gemeinsame Nachbarn, wenn sie sich in genau zwei Positionen unterscheiden, das heißt es gilt  $u \oplus e_i = v \oplus e_j$  für geeignete Indizes  $i \neq j$ . Dabei ist  $e_k$  für einen Index  $k \in \{1, \dots, n\}$  der 0-1-Vektor, dessen  $k$ -te Komponente eine 1 ist und sonst nur aus Nullen besteht. Die gemeinsamen Nachbarn von  $u$  und  $v$  sind dann  $u \oplus e_i$  und  $u \oplus e_j$ .

Payan konnte zeigen, dass es keine 3-chromatischen würfelähnlichen Graphen gibt. Daher vermutete er, dass es auch keine endlichen 3-chromatischen  $(0, 2)$ -Graphen gibt ([Pay92]). Während würfelähnliche Graphen per Definition endlich sind, können  $(0, 2)$ -Graphen unendlich sein. Wie Payan schon festgestellt hat, ist es nicht schwer, einen **unendlichen** 3-chromatischen  $(0, 2)$ -Graphen zu konstruieren:

- 1: Starte mit dem Graphen  $G = (\mathbb{N}, \emptyset)$ .
- 2: Füge die Kanten  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$  und  $\{3, 1\}$  hinzu.
- 3: **for**  $i = 4, 5, 6, \dots$  **do**
- 4: Wähle zwei Knoten  $m < n$  mit  $|N_G(m) \cap N_G(n)| = 1$  und  $n$  minimal.
- 5: Füge die Kanten  $\{m, i\}$  und  $\{n, i\}$  zu  $G$  hinzu.
- 6: **end for**

Man kann zeigen, dass der auf diese Weise konstruierte Graph  $G$  ein unendlicher 3-chromatischer  $(0, 2)$ -Graph ist. Dies soll jedoch nicht Bestandteil dieser Arbeit sein.

Daher beschränkte sich Payan bei seiner Vermutung auf endliche  $(0, 2)$ -Graphen. Im Folgenden sprechen wir nur noch von Graphen, wenn wir endliche Graphen meinen. Göring führte ein Indiz an, weshalb die Vermutung falsch sein könnte ([Gör09]). Abgesehen vom Zusammenhang ist die Eigenschaft, ein  $(0, 2)$ -Graph zu sein, eine lokale Eigenschaft. Die chromatische Zahl eines Graphen ist im Allgemeinen jedoch nicht nur von der lokalen Struktur eines Graphen abhängig. Zwar können lokale Bedingungen die chromatische Zahl nach unten beschränken, doch da Würfelgraphen 2-chromatische  $(0, 2)$ -Graphen sind, kann diese untere Schranke nicht größer als 2, also insbesondere nicht größer als 3 sein. Daher ist es durchaus denkbar, dass hinreichend große  $(0, 2)$ -Graphen 3-chromatisch sein können. Aus diesem Grund beschäftigen wir uns in dieser Arbeit zu einem großen Teil mit der Konstruktion möglicher Gegenbeispiele.

## 2.2 Eigenschaften von $(0, \lambda)$ -Graphen

In diesem Abschnitt stellen wir wichtige, hauptsächlich lokale Eigenschaften von  $(0, \lambda)$ -Graphen und insbesondere von  $(0, 2)$ -Graphen vor.

**Lemma 5 (Lokale Struktur von  $(0, \lambda)$ -Graphen):** *Seien  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph und  $v$  ein Knoten. Dann ist  $G[N_G(v)]$  von der Gestalt  $G[N_G(v)] = G_1 \cup G_2$ , wobei  $G_1 = (V_1, \emptyset)$  ein leerer Graph und  $G_2 = (V_2, E(G_2))$  ein  $\lambda$ -regulärer Graph ist.*

**Beweis:** Wir setzen  $V_1 := \{u \in N_G(v) : N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset\}$  und  $V_2 := N_G(v) \setminus V_1$ . Per Definition gilt  $E(V_1) = \emptyset$  und es gibt keine Kante zwischen  $V_1$  und  $V_2$ . Sei  $u \in V_2$  ein beliebiger Knoten. Dann besitzen  $u$  und  $v$  einen gemeinsamen Nachbarn, also insgesamt genau  $\lambda$  gemeinsame Nachbarn. Diese liegen in  $V_2$ . Mit  $G_2 := G[V_2]$  folgt  $d_{G_2}(u) = \lambda$  und damit die Behauptung. ■

**Folgerung 6:** *Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph und  $v$  ein Knoten. Dann ist  $G[N_G(v)]$  von der Gestalt  $G[N_G(v)] = (S, \emptyset) \cup \bigcup_{i=1}^m C_{l_i}$ , wobei  $C_{l_i}$  Kreise der Länge  $l_i \neq 4$  sind.*

**Beweis:** Wegen Lemma 5 ist  $G[N_G(v)]$  die disjunkte Vereinigung eines leeren Graphen und eines 2-regulären Graphen. 2-reguläre Graphen bestehen aus disjunkten Kreisen. Wäre einer dieser Kreise ein Kreis der Länge 4, dann besäßen gegenüberliegende Knoten dieses Kreises mindestens 3 gemeinsame Nachbarn. ■

## 2 Grundlegende Begriffe

**Satz 7:** Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph und  $u, v$  zwei benachbarte Knoten. Dann gibt es zu jedem Nachbarn  $v' \neq v$  von  $u$  genau einen Nachbarn  $u' \neq u$  von  $v$  mit  $\{u', v'\} \in E(G)$ .

**Beweis:** Sei  $v' \neq v$  ein Nachbar von  $u$ . Dann besitzen  $v'$  und  $v$  den Knoten  $u$  als gemeinsamen Nachbarn. Demzufolge gibt es genau einen weiteren Nachbarn  $u'$  von  $v$ , der zu  $v'$  benachbart ist. ■

**Korollar 8:** Jeder  $(0, \lambda)$ -Graph ist regulär.

Für einen direkten Beweis von Korollar 8 sei auf [Mul79], Proposition 1 verwiesen. Aufgrund von Korollar 8 können wir von der Valenz eines  $(0, \lambda)$ -Graphen sprechen.

Satz 7 liefert eine bijektive Zuordnung der Nachbarschaft von  $u$  (ohne  $v$ ) auf die Nachbarschaft von  $v$  (ohne  $u$ ). Wir erweitern diese auf die Knoten  $u$  und  $v$ .

**Definition 9 (Nachbarschaftsbijektion):** Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph und  $u, v$  zwei benachbarte Knoten von  $G$ . Die Abbildung  $\Phi_{u,v}: N_G(u) \rightarrow N_G(v)$ , definiert durch

$$\Phi_{u,v}(v') = \begin{cases} u & : v' = v, \\ u' & : N_G(v) \cap N_G(v') = \{u, u'\}, \end{cases}$$

heißt Nachbarschaftsbijektion von  $u$  und  $v$  (in  $G$ ).

Wir können die Knotenzahl eines  $(0, \lambda)$ -Graphen sowohl nach unten als auch nach oben abschätzen, sofern wir seinen Grad kennen.

**Satz 10:** Seien  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph und  $d = d(G)$  seine Valenz. Dann gilt

$$1 + \frac{d(d-1)}{\lambda} \leq |V(G)| \leq 1 + d + \frac{d(d-1)}{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{d-\lambda} \frac{\binom{d}{\lambda+i}}{\binom{d}{\lambda}}.$$

**Beweis:** siehe [Mul80], Theorem 2.1.5 ■

**Korollar 11:** Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph und  $d = d(G)$  seine Valenz. Dann gilt

$$1 + \binom{d}{2} \leq |V(G)| \leq 2^d.$$

## 3 Planare $(0, \lambda)$ -Graphen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass Payans Vermutung für sogenannte *planare*  $(0, \lambda)$ -Graphen korrekt ist. Dabei wird die Existenz von Dreiecken in solchen Graphen eine wesentliche Rolle spielen. Wie wir aber sehen werden, ist die Klasse der planaren  $(0, \lambda)$ -Graphen sehr klein.

**Definition 12 (Planarer Graph):** *Ein Graph  $G$  heißt planar, sofern eine injektive Funktion  $\pi: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert, sodass für zwei verschiedene Kanten  $\{u_1, v_1\}$  und  $\{u_2, v_2\}$  von  $G$  gilt: Schneiden sich die Strecken  $\overline{\pi(u_1)\pi(v_1)}$  und  $\overline{\pi(u_2)\pi(v_2)}$ , dann nur in einem der Punkte  $\pi(u_1)$  oder  $\pi(v_1)$  sowie einem der Punkte  $\pi(u_2)$  oder  $\pi(v_2)$ .*

Definition 12 ist nicht die originale Definition eines planaren Graphen, aber nach dem Theorem von Fáry ist sie äquivalent dazu ([Fár48]).

Zunächst beweisen wir eine Aussage, die für alle  $(0, \lambda)$ -Graphen erfüllt ist, deren Nutzen für uns jedoch auf die planaren Graphen beschränkt bleibt.

**Satz 13:** *Die Valenz jedes 3-färbbaren  $(0, \lambda)$ -Graphen, der ein Dreieck enthält, ist mindestens  $2(\lambda + 1)$ .*

**Beweis:** Seien  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph mit einer 3-Färbung und  $u_1, v_1, w_1$  Knoten mit den Farben 1, 2 und 3, die ein Dreieck bilden. (Hinweis: Im Folgenden beschreiben einige Knotennamen bereits die Farbe der Knoten:  $u_i$  - Farbe 1,  $v_i$  - Farbe 2 und  $w_i$  - Farbe 3.)

Die Knoten  $u_1$  und  $v_1$  besitzen  $w_1$  als gemeinsamen Nachbarn. Daher existieren  $\lambda - 1$  weitere gemeinsame Nachbarn  $w_2, \dots, w_\lambda$  (mit Farbe 3).

Die Knoten  $u_1$  und  $w_\lambda$  besitzen  $v_1$  als gemeinsamen Nachbarn. Daher existieren  $\lambda - 1$  weitere gemeinsame Nachbarn  $v_2, \dots, v_\lambda$  (mit Farbe 2).

Die Knoten  $u_1$  und  $v_\lambda$  besitzen  $w_\lambda$  als gemeinsamen Nachbarn. Daher existieren

### 3 Planare $(0, \lambda)$ -Graphen

$\lambda - 1$  weitere gemeinsame Nachbarn  $x_1, \dots, x_{\lambda-1}$  (mit Farbe 3). Wir zeigen, dass es einen Knoten  $w_{\lambda+1} \in \{x_1, \dots, x_{\lambda-1}\}$  gibt, der keiner der Knoten  $w_1, \dots, w_{\lambda-1}$  ist. Dazu führen wir die Gegenannahme  $\{x_1, \dots, x_{\lambda-1}\} = \{w_1, \dots, w_{\lambda-1}\}$  zu einem Widerspruch. In diesem Fall besitzen die Knoten  $v_1$  und  $v_\lambda$  mindestens  $\lambda+1$  gemeinsame Nachbarn:  $u_1$  sowie  $w_1, \dots, w_\lambda$ . Das ist nicht möglich, da  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph ist.

Die Knoten  $u_1$  und  $w_{\lambda+1}$  besitzen  $v_\lambda$  als gemeinsamen Nachbarn. Daher existieren  $\lambda - 1$  weitere gemeinsame Nachbarn  $y_1, \dots, y_{\lambda-1}$  (mit Farbe 2). Wir zeigen, dass es einen Knoten  $v_{\lambda+1} \in \{y_1, \dots, y_{\lambda-1}\}$  gibt, der keiner der Knoten  $v_1, \dots, v_{\lambda-1}$  ist. Dazu führen wir die Gegenannahme  $\{y_1, \dots, y_{\lambda-1}\} = \{v_1, \dots, v_{\lambda-1}\}$  zu einem Widerspruch. In diesem Fall besitzen die Knoten  $w_\lambda$  und  $w_{\lambda+1}$  mindestens  $\lambda+1$  gemeinsame Nachbarn:  $u_1$  sowie  $v_1, \dots, v_\lambda$ . Das ist nicht möglich, da  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph ist.

Wir haben gezeigt, dass die Knoten  $v_1, \dots, v_{\lambda+1}$  und  $w_1, \dots, w_{\lambda+1}$  paarweise verschieden sind. Daher gilt  $d(G) = d(u_1) \geq 2(\lambda + 1)$ . ■

**Folgerung 14:** *Kein planarer 3-färbbarer  $(0, \lambda)$ -Graph enthält ein Dreieck.*

**Beweis:** Diese Aussage folgt direkt aus Satz 13 und der Tatsache, dass es in einem planaren Graphen stets einen Knoten mit Valenz höchstens 5 gibt. ■

In Satz 19 werden wir induktiv zeigen, dass planare  $(0, \lambda)$ -Graphen, die einen Kreis ungerader Länge enthalten, auch ein Dreieck enthalten. Im Folgenden bereiten wir den Induktionsschritt vor.

**Beobachtung 15:** *Seien  $k \geq 5$  eine ungerade Zahl,  $C_k$  ein Kreis der Länge  $k$  und  $u \neq v \in V(C_k)$  zwei Knoten mit  $e := \{u, v\} \notin E(C_k)$ . Dann enthält  $C_k + e := (V(C_k), E(C_k) \cup \{e\})$  einen Kreis ungerader Länge  $l < k$ .*

Wir definieren nun, was wir unter der  $l$ -ten Potenz eines Graphen verstehen.

**Definition 16** (vgl. [Die06], Abschnitt 8.3): *Seien  $G$  ein Graph und  $l$  eine natürliche Zahl. Dann ist die  $l$ -te Potenz von  $G$ , symbolisch  $G^l$ , definiert durch  $V(G^l) := V(G)$  und  $E(G^l) := \{\{u, v\} : d_G(u, v) \leq l\}$ .*

Wir wollen zeigen, dass das Quadrat eines Kreises  $C_k$  mit ungerader Länge  $k \geq 5$  nicht planar ist. Dazu bedienen wir uns folgendes Hilfskonstruktes.

**Definition 17:** Sei  $X$  ein Graph. Dann ist  $\mathcal{MX}$  die Menge aller Graphen  $G$ , für die eine Partition<sup>1</sup> von  $V(G)$  in  $|V(X)|$  nichtleere Klassen  $V_x$ ,  $x \in V(X)$ , existiert, sodass gilt:

1. Der Graph  $G[V_x]$  ist für jedes  $x \in V(X)$  zusammenhängend.
2. Es gibt genau dann eine Kante zwischen  $x$  und  $y$  in  $X$ , wenn es eine Kante zwischen der Klasse  $V_x$  und der Klasse  $V_y$  in  $G$  gibt.

Die Mengen  $V_x$  heißen in diesem Zusammenhang Verzweigungsmengen.

**Proposition 18:** Sei  $k \geq 5$  eine ungerade natürliche Zahl. Dann gilt  $C_k^2 \in \mathcal{MK}_5$ . Dabei ist  $K_5$  der sogenannte vollständige Graph auf 5 Knoten, das heißt der Graph mit  $|V(K_5)| = 5$  und  $E(K_5) = \binom{V(K_5)}{2}$ .

**Beweis:** Seien  $V(K_5) = \{1, \dots, 5\}$  und  $V(C_k^2) = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Als Verzweigungsmengen setzen wir  $V_1 := \{v_1\}$ ,  $V_2 := \{v_2\}$ ,  $V_3 := \{v_3\}$ ,  $V_4 := \{v_4, v_6, \dots, v_{k-1}\}$  und  $V_5 := \{v_5, v_7, \dots, v_k\}$ .

Offenbar sind die Graphen  $C_k^2[V_i]$  zusammenhängend und zwischen je zwei verschiedenen Mengen  $V_i$  und  $V_j$  verläuft eine Kante. Daher gilt  $C_k^2 \in \mathcal{MK}_5$ . ■

Mit den in diesem Abschnitt bereitgestellten Aussagen können wir nun den letzten Satz beweisen, der uns noch fehlt, um Payans Vermutung für planare  $(0, 2)$ -Graphen zu beweisen.

**Satz 19:** Enthält ein planarer  $(0, \lambda)$ -Graph einen Kreis ungerader Länge, dann enthält er auch ein Dreieck.

**Beweis:** Wir beweisen diese Aussage induktiv über die (ungerade) Kreislänge  $k$ . Der Induktionsanfang  $k = 3$  ist trivialerweise erfüllt. Sei also  $G$  ein planarer  $(0, \lambda)$ -Graph mit einem Kreis  $(v_1, \dots, v_k, v_1)$  ungerader Länge  $k \geq 5$ . Wir setzen  $v_0 := v_k$  sowie  $v_{k+1} := v_1$ . Für jeden Index  $i \in \{1, \dots, k\}$  besitzen die Knoten  $v_{i-1}$  und  $v_{i+1}$  den Knoten  $v_i$  als gemeinsamen Nachbarn. Da  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph ist und  $\lambda \geq 2$  gilt, besitzen sie noch einen weiteren gemeinsamen Nachbarn  $u_i$ .

Wir untersuchen zunächst den Fall, dass ein Knoten  $u_j$  zu dem Kreis  $(v_1, \dots, v_k, v_1)$  gehört, also  $u_j = v_i$  für ein geeignetes  $i$  gilt. Der Knoten  $v_i = u_j$  ist ein Nachbar von

---

<sup>1</sup> $(M_1, \dots, M_n)$  heißt *Partition* der Menge  $M$ , falls  $M = \bigcup_{k=1}^n M_k$  gilt.

### 3 Planare $(0, \lambda)$ -Graphen

$v_{j-1}$  und  $v_{j+1}$ , das heißt  $e_1 := \{v_i, v_{j-1}\}$  und  $e_2 := \{v_i, v_{j+1}\}$  sind Kanten in  $G$ . Wegen  $u_j \neq v_j$  gilt  $i \neq j$ . Daher können nicht beide Kanten  $e_1$  und  $e_2$  Kanten des Kreises  $(v_1, \dots, v_k, v_1)$  sein. Aufgrund von Beobachtung 15 enthält  $G$  somit einen ungeraden Kreis kleinerer Länge und die Induktionsvoraussetzung liefert die Behauptung.

Seien die Mengen  $\{v_1, \dots, v_k\}$  und  $\{u_1, \dots, u_k\}$  disjunkt. Nun betrachten wir den Fall, dass  $u_i = u_j$  für geeignete Indizes  $i \neq j$  gilt. Die Knoten  $v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_k$  bilden einen Kreis  $C'$  der Länge  $k$ . Der Knoten  $u_i = u_j$  ist ein Nachbar von  $v_{j-1}$  und  $v_{j+1}$ . Wegen  $i \neq j$  sind die Kanten  $f_1 := \{u_i, v_{j-1}\}$  und  $f_2 := \{u_i, v_{j+1}\}$  nicht beide Kanten des Kreises  $C'$ . Aufgrund von Beobachtung 15 enthält  $G$  einen ungeraden Kreis kleinerer Länge. Anwenden der Induktionsvoraussetzung liefert die Behauptung.

Wir wollen den verbleibenden Fall, dass die Knoten  $v_1, \dots, v_k$  und  $u_1, \dots, u_k$  paarweise verschieden sind, zum Widerspruch führen. In diesem Fall ist der Graph  $H$ , gegeben durch  $V(H) = \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$  und  $E(H) = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i = 1, \dots, k\} \cup \{\{u_i, v_{i-1}\} : i = 1, \dots, k\} \cup \{\{u_i, v_{i+1}\} : i = 1, \dots, k\}$  ein Untergraph von  $G$ . Wir zeigen, dass  $H$  nicht planar ist, denn dann ist offenbar auch  $G$  nicht planar. Dazu zeigen wir, dass  $H \in \mathcal{MC}_k^2$  gilt. Sei  $V(C_k^2) = \{1, \dots, k\}$ . Als Verzweigungsmengen setzen wir  $V_i := \{v_{i-1}, u_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Die Graphen  $G[V_i]$  sind offenbar zusammenhängend und es ist leicht zu sehen, dass zwischen zwei verschiedenen Mengen  $V_i$  und  $V_j$  in  $H$  genau dann eine Kante verläuft, wenn  $\{i, j\}$  eine Kante in  $C_k^2$  ist. Damit gilt  $H \in \mathcal{MC}_k^2$ , und wegen  $C_k^2 \in \mathcal{MK}_5$  (Proposition 18) gilt auch  $H \in \mathcal{MK}_5$  (vgl. [Die06], Proposition 0.7.1), das heißt der  $K_5$  ist ein sogenannter *Minor* von  $H$ . Aufgrund des Satzes von Wagner ist  $H$  nicht planar ([Wag37]) und damit auch  $G$  nicht. Das widerspricht der Voraussetzung, das heißt dieser Fall kann nicht eintreten. ■

Nun können wir zeigen, dass Payans Vermutung für **planare**  $(0, 2)$ -Graphen korrekt ist. Wir können die chromatische Zahl solcher Graphen sogar charakterisieren. In Satz 21 zeigen wir aber, dass die Menge der Graphen, über die wir in diesem Abschnitt sprechen, nicht allzu groß ist.

**Folgerung 20:** *Sei  $G$  ein planarer  $(0, \lambda)$ -Graph mit mindestens 2 Knoten und  $\chi(G)$  seine chromatische Zahl. Dann gilt:*

$$\chi(G) = \begin{cases} 4 & : G \text{ enthält ein Dreieck,} \\ 2 & : G \text{ enthält kein Dreieck.} \end{cases}$$

*Insbesondere gibt es keine planaren  $(0, 2)$ -Graphen mit chromatischer Zahl 3.*

**Beweis:** Enthält  $G$  ein Dreieck, dann gilt  $\chi(G) \geq 3$ . Nach Folgerung 14 kann  $G$  nicht 3-färbbar sein, also gilt  $\chi(G) \geq 4$ . Mit dem *Vierfarbensatz* (vgl. [Die06], Satz 4.1.1), der besagt, dass jeder planare Graph 4-färbbar ist, folgt  $\chi(G) = 4$ .

Wir betrachten noch den Fall, dass  $G$  kein Dreieck enthält. Dreiecksfreie planare Graphen sind stets 3-färbbar ([Grö59]). Da  $G$  nicht nur planar, sondern auch ein  $(0, \lambda)$ -Graph ist, können wir hier jedoch mehr zeigen. Nach Satz 19 enthält  $G$  keinen Kreis ungerader Länge. Daher ist  $G$  2-färbbar (vgl. [Die06], Proposition 0.6.1). Da  $G$  mindestens eine Kante besitzt, ist  $G$  nicht 1-färbbar und es folgt  $\chi(G) = 2$ . ■

Wie wir am Beweis von Folgerung 20 sehen können, genügen uns Folgerung 14 und Satz 19, um Payans Vermutung für planare  $(0, 2)$ -Graphen zu beweisen. Eine naheliegende Frage ist daher, ob sich diese beiden Aussagen auf die Menge aller  $(0, 2)$ -Graphen verallgemeinern<sup>2</sup> lassen. In der Tat gilt die Aussage von Folgerung 14 für alle  $(0, 2)$ -Graphen (Korollar 82). Satz 19 lässt sich hingegen nicht auf beliebige  $(0, 2)$ -Graphen verallgemeinern (siehe Beispiel 49).

Eine weitere Frage, die im Folgenden noch beantwortet werden soll, ist die Frage, wie viele planare  $(0, \lambda)$ -Graphen es überhaupt gibt.

**Satz 21:** Sei  $p_\lambda := \max\{|V(G)| : G \text{ planarer } (0, \lambda)\text{-Graph}\}$  für alle  $\lambda \geq 2$ . Dann gilt  $p_2 \leq 32$ ,  $p_3 \leq 16$ ,  $p_4 \leq 12$ ,  $p_5 \leq 10$  und  $p_\lambda = 2$  für  $\lambda \geq 6$ .

**Beweis:** Wir nutzen aus, dass die Valenz eines regulären planaren Graphen kleiner als 6 sein muss. Die Schranken für die Knotenzahl aus Satz 10 sind offenbar monoton in der Valenz des Graphen. Für  $\lambda = 2, 3, 4, 5$  setzen wir daher  $d := 5$  in die obere Schranke ein und erhalten die Behauptung.

Den Fall  $\lambda \geq 6$  betrachten wir gesondert. Sei  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph mit mindestens 3 Knoten. Da  $G$  zusammenhängend ist, gibt es paarweise verschiedene Knoten  $u, v, w$ , sodass  $w$  ein gemeinsamer Nachbar der Knoten  $u$  und  $v$  ist. Demzufolge müssen  $u$  und  $v$  noch genau  $\lambda - 1$  weitere gemeinsame Nachbarn besitzen und es folgt  $d_G(u), d_G(v) \geq \lambda \geq 6$ . Der Graph  $G$  ist daher nicht planar und es folgt  $p_\lambda \leq 2$ . Da der Graph  $K_2$  für jede Zahl  $\lambda \geq 2$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph ist, gilt Gleichheit. ■

Die Schranken aus Satz 21 sind eventuell nicht scharf. Sie sind aber ausreichend für unsere Zwecke, denn sie zeigen, dass die Menge der planaren  $(0, \lambda)$ -Graphen endlich

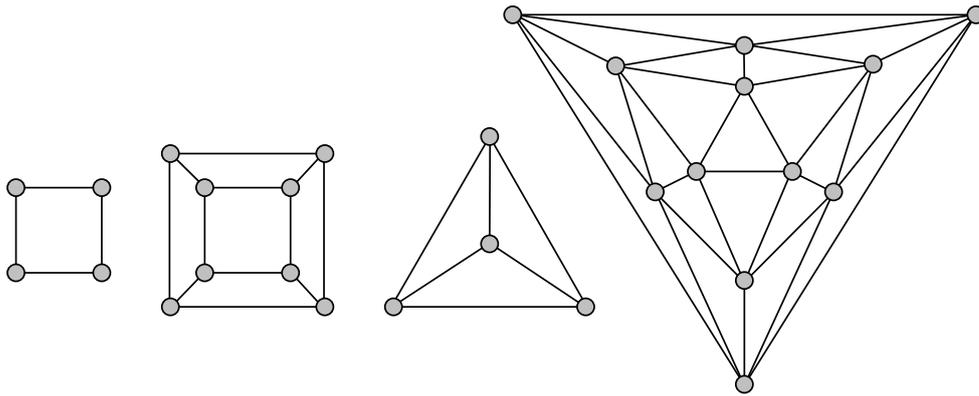
---

<sup>2</sup>„Verallgemeinern“ ist nicht ganz richtig, da sich beide Aussagen auf  $(0, \lambda)$ -Graphen beziehen.

### 3 Planare $(0, \lambda)$ -Graphen

ist. Damit bilden diese Graphen nur einen sehr kleinen Teil aller  $(0, \lambda)$ -Graphen, denn allein die Menge der Würfelgraphen ist unendlich groß.

Beispiele für planare  $(0, 2)$ -Graphen sind die 2-färbbaren Würfelgraphen  $Q_2$  und  $Q_3$  sowie der 4-färbbare Tetraedergraph und der 4-färbbare Ikosaedergraph.



## 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Möglichkeiten,  $(0, 2)$ -Graphen zu konstruieren. Es scheint schwierig zu sein, eine allgemeine Konstruktionsvorschrift zu finden. Daher beschränken wir uns auf unäre und binäre Operationen auf  $(0, 2)$ -Graphen, die uns (eventuell) neue  $(0, 2)$ -Graphen liefern. Wo es ohne großen zusätzlichen Aufwand möglich ist, verallgemeinern wir die Aussagen auf  $(0, \lambda)$ -Graphen.

Die hier vorgestellten Konstruktionen wurden im Zusammenhang mit  $(0, 2)$ -Graphen bereits von Brouwer und Östergård erwähnt ([Bro06], [BÖ09]), manche etwas allgemeiner, manche etwas spezieller. In dieser Arbeit wollen wir die Ideen jedoch nicht nur vorstellen und ihre Korrektheit beweisen, sondern auch ihre Entstehung motivieren und diskutieren, inwieweit sie sich für die Konstruktion eines Gegenbeispiels für Payans Vermutung eignen können.

### 4.1 Das bipartite Doppelte eines Graphen

Die erste Operation, die wir hier vorstellen, ist eine unäre Operation auf  $(0, \lambda)$ -Graphen. Obwohl aufgrund von [Bro06] bereits klar ist, dass mit dieser Konstruktion Payans Vermutung nicht widerlegt werden kann, können wir sie nutzen, um die obere Schranke aus Satz 10 für  $(0, \lambda)$ -Graphen mit chromatischer Zahl größer oder gleich 3 zu verbessern.

Zwei verschiedene Knoten eines  $(0, \lambda)$ -Graphen besitzen 0 oder  $\lambda$  gemeinsame Nachbarn. Da nur die Anzahl ihrer gemeinsamen Nachbarn und nicht ihre gemeinsamen Nachbarn selbst von Interesse sind, können wir diese durch andere Knoten ersetzen, die mit den beiden betrachteten Knoten über eine Kante verbunden sind. Erstellen wir für jeden Knoten  $v$  eine Kopie  $v'$  und verbinden nun nicht mehr zwei Originalknoten  $u$  und  $v$ , sondern den Originalknoten  $u$  mit der Kopie  $v'$  und den Original-

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

knoten  $v$  mit der Kopie  $u'$ , dann besitzen verschiedene Knoten des so entstandenen Graphen bereits die „richtige“ Anzahl gemeinsamer Nachbarn, wie wir in Lemma 23 zeigen werden. Zunächst führen wir diese Konstruktion jedoch formal ein.

**Definition 22 (Bipartites Doppeltes):** Sei  $G$  ein Graph mit  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann heißt der Graph  $2G$ , definiert durch  $V(2G) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{v'_1, \dots, v'_n\}$  und  $E(2G) = \{\{v_i, v'_j\} : \{v_i, v_j\} \in E(G)\}$  das bipartite Doppelte von  $G$ .

Innerhalb der Mengen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$  von  $2G$  verlaufen per Konstruktion keine Kanten. Das bipartite Doppelte eines Graphen ist daher stets 2-färbbar. Wie gewollt besitzen die Knoten  $v_i$  und  $v_j$  statt eines (in  $G$ ) gemeinsamen Nachbarn  $v_k$  in  $2G$  nun  $v'_k$  als gemeinsamen Nachbarn.

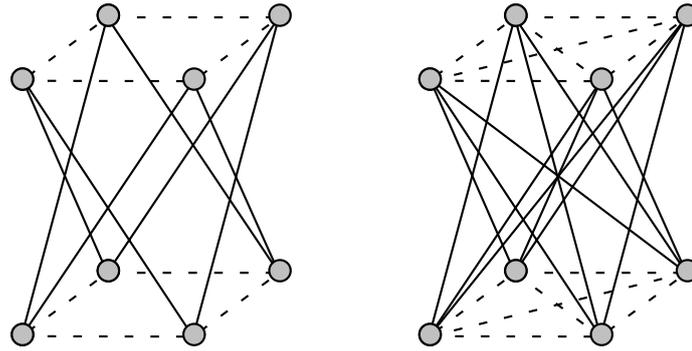
Darüber hinaus können wir die Knoten  $v_1, \dots, v_n$  auch als Kopien der Knoten  $v'_1, \dots, v'_n$  auffassen: Ist  $\{v_i, v'_j\}$  eine Kante von  $2G$ , dann auch  $\{v'_i, v_j\}$ . Das können wir in Beweisen ausnutzen, um die Anzahl zu betrachtender Fälle zu reduzieren. So auch im Beweis des folgenden Lemmas.

**Lemma 23:** Seien  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph und  $u \neq v$  zwei Knoten von  $2G$ . Dann besitzen  $u$  und  $v$  entweder 0 oder  $\lambda$  gemeinsame Nachbarn.

**Beweis:** Sei  $V(2G) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{v'_1, \dots, v'_n\}$  wie in Definition 22. Ohne Einschränkung besitzen  $u$  und  $v$  mindestens einen gemeinsamen Nachbarn und es gelte  $u = v_i$  für einen geeigneten Index  $i$ . Da  $2G$  2-färbbar ist, folgt  $v = v_j$  für einen geeigneten Index  $j \neq i$ . Gemeinsame Nachbarn von  $u$  und  $v$  liegen daher in  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$  und es folgt:  $v'_k$  ist ein gemeinsamer Nachbar von  $u$  und  $v$  genau dann, wenn  $v_k$  ein gemeinsamer Nachbar von  $v_i$  und  $v_j$  ist. Da die Knoten  $v_i$  und  $v_j$  in  $G$  genau  $\lambda$  gemeinsame Nachbarn besitzen, folgt die Behauptung. ■

Folgende Abbildung zeigt das bipartite Doppelte des Würfelgraphen  $Q_2$  und das bipartite Doppelte des vollständigen Graphen  $K_4$ , der als Würfelgraph  $Q_3$  aufgefasst werden kann. Die gestrichelten Kanten dienen der Anschaulichkeit und verdeutlichen die Kanten in den Kopien der ursprünglichen Graphen.

#### 4.1 Das bipartite Doppelte eines Graphen



Der linke Graph zeigt, dass das bipartite Doppelte im Allgemeinen nicht zusammenhängend ist. Wir müssen aber sicherstellen, dass das bipartite Doppelte zusammenhängend ist, um wieder einen  $(0, \lambda)$ -Graphen zu erhalten.

**Proposition 24:** *Seien  $G$  ein zusammenhängender, nicht 2-färbbarer Graph und  $u, v$  zwei Knoten von  $G$ . Dann gibt es von  $u$  nach  $v$  sowohl einen Weg ungerader Länge als auch einen Weg gerader Länge in  $G$ .*

**Beweis:** Da  $G$  nicht 2-färbbar ist, gibt es in  $G$  einen Kreis  $(w_1, \dots, w_l, w_1)$  ungerader Länge  $l$ . Seien  $(u_0, \dots, u_{l_1})$  mit  $u_0 = u$  und  $u_{l_1} = w_l$  ein Weg von  $u$  nach  $w_l$  in  $G$  und  $(v_0, \dots, v_{l_2})$  mit  $v_0 = w_l$  und  $v_{l_2} = v$  ein Weg von  $w_l$  nach  $v$  in  $G$ .

Dann sind  $(u_0, \dots, u_{l_1}, v_1, \dots, v_{l_2})$  und  $(u_0, \dots, u_{l_1}, w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_{l_2})$  Wege der Länge  $l_1 + l_2$  beziehungsweise  $l_1 + l_2 + l$  von  $u$  nach  $v$  in  $G$ . Da  $l$  ungerade ist, folgt die Behauptung. ■

**Satz 25:** *Das bipartite Doppelte  $2G$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $G$  nicht 2-färbbar ist.*

**Beweis:** Sei  $G$  2-färbbar und  $\chi$  eine 2-Färbung von  $G$  mit den Farben 1 und 2. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass  $2G$  zusammenhängend ist. Dann setzen wir  $V_1 := \{v_i : \chi(v_i) = 1\} \cup \{v'_i : \chi(v_i) = 2\}$  und  $V_2 := V(2G) \setminus V_1$ . Da  $2G$  nach obiger Annahme zusammenhängend ist, existieren Knoten  $u \in V_1$  und  $v \in V_2$  mit  $\{u, v\} \in E(2G)$ . Aufgrund der Gestalt von  $2G$  gibt es Indizes  $i \neq j$  mit  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$  und  $(u, v) = (v_i, v'_j)$  oder  $(u, v) = (v'_i, v_j)$  und es folgt  $\chi(v_i) = \chi(v_j)$ . Wegen  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$  ist das ein Widerspruch, da  $\chi$  eine 2-Färbung von  $G$  ist.

Sei  $G$  nicht 2-färbbar und seien  $u \neq v$  zwei Knoten von  $2G$ . Ohne Einschränkung gelte  $u = v_i$  für einen geeigneten Index  $i$ . Wir betrachten zunächst den Fall  $v = v_j$

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

für einen Index  $j$ . Nach Proposition 24 gibt es einen Weg gerader Länge von  $v_i$  nach  $v_j$  in  $G$  und deshalb auch einen Weg von  $u$  nach  $v$  in  $2G$ . Sei also  $v = v'_j$  für einen Index  $j$ . Ebenfalls wegen Proposition 24 gibt es einen Weg ungerader Länge von  $v_i$  nach  $v_j$  und daher einen Weg von  $u$  nach  $v$  in  $2G$ . Der Graph  $2G$  ist demzufolge zusammenhängend. ■

**Korollar 26:** *Sei  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph. Dann ist sein bipartites Doppeltes  $2G$  genau dann ein  $(0, \lambda)$ -Graph, wenn  $\chi(G) \geq 3$  gilt.*

Mit Hilfe von Korollar 26 können wir die obere Schranke aus Satz 10 etwas verbessern. Für  $(0, 2)$ -Graphen wurde dies bereits in [Bro06] festgestellt.

**Folgerung 27:** *Sei  $s_\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $|V(G)| \leq s_\lambda(d(G))$  für alle  $(0, \lambda)$ -Graphen  $G$  gilt.<sup>1</sup> Dann gilt für alle  $(0, \lambda)$ -Graphen  $G$  mit  $\chi(G) \geq 3$  die Abschätzung*

$$|V(G)| \leq \frac{s_\lambda(d(G))}{2}.$$

**Beweis:** Sei  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph mit  $\chi(G) \geq 3$ . Dann ist sein bipartites Doppeltes ein  $(0, \lambda)$ -Graph und es folgt  $|V(G)| = \frac{1}{2}|V(2G)| \leq \frac{1}{2}s_\lambda(d(2G)) = \frac{1}{2}s_\lambda(d(G))$ . ■

## 4.2 Das Kartesische Produkt zweier Graphen

Wir werden in diesem Abschnitt eine Möglichkeit kennenlernen, Graphen zu „multiplizieren“, und feststellen, dass die Menge der  $(0, 2)$ -Graphen abgeschlossen unter dieser Operation ist.

Zunächst beginnen wir mit der Feststellung, dass man Würfelgraphen rekursiv definieren kann. Verbindet man zwei Kopien  $Q'_n$  und  $Q''_n$  des Würfelgraphen  $Q_n$  (definiert auf den Knoten  $v'_1, \dots, v'_{2^n}$  beziehungsweise  $v''_1, \dots, v''_{2^n}$ ) mit Kanten der Form  $\{v'_i, v''_i\}$  für alle Indizes  $i = 1, \dots, 2^n$ , so ist der so entstandene Graph der Würfelgraph  $Q_{n+1}$ .

Wählt man als Ausgangsgraphen anstatt der zwei Kopien des  $Q_n$  zwei Kopien eines beliebigen  $(0, 2)$ -Graphen  $G$  und verbindet diese auf gleiche Weise miteinander, so ist das Resultat  $G'$  ebenfalls wieder ein  $(0, 2)$ -Graph. Wir wollen diese Konstruktion noch weiter verallgemeinern.

---

<sup>1</sup>Für eine mögliche Wahl von  $s_\lambda$  siehe Satz 10.

## 4.2 Das Kartesische Produkt zweier Graphen

Betrachten wir  $G'$  etwas genauer, erkennen wir, dass  $G'$  nicht nur aus zwei Kopien von  $G$  besteht, sondern auch aus  $|V(G)|$  Kopien des Würfelgraphen  $Q_1$ . Der Graph  $G$  beschreibt dabei, wie diese Kopien des  $Q_1$  miteinander verbunden sind. Wählen wir anstatt  $Q_1$  einen beliebigen Graphen, so erhalten wir das sogenannte *Kartesische Produkt*.

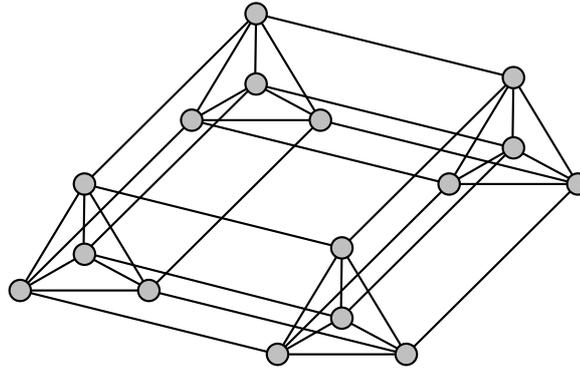
**Definition 28 (Kartesisches Produkt):** Seien  $G_1$  und  $G_2$  beliebige Graphen. Dann heißt der Graph  $G_1 \times G_2$ , definiert durch  $V(G_1 \times G_2) := V(G_1) \times V(G_2)$  und

$$E(G_1 \times G_2) := \{ \{ (u_1, u_2), (v_1, v_2) \} : u_1 = v_1 \text{ und } \{u_2, v_2\} \in E(G_2) \} \\ \cup \{ \{ (u_1, u_2), (v_1, v_2) \} : u_2 = v_2 \text{ und } \{u_1, v_1\} \in E(G_1) \},$$

das Kartesische Produkt von  $G_1$  und  $G_2$ .

Das Kartesische Produkt zweier Graphen ist eine Verallgemeinerung eines Gitters. Jede Kante in einem Graphen  $G_1 \times G_2$  ist entweder eine Kante in einer Kopie von  $G_1$  oder eine Kante in einer Kopie von  $G_2$ .

Folgende Darstellung zeigt das Kartesische Produkt  $C_4 \times K_4$  der beiden  $(0, 2)$ -Graphen  $C_4$ , einem Kreis der Länge 4, und dem vollständigen Graphen  $K_4$ , dem Tetraedergraphen.



Wir werden zeigen, dass das Kartesische Produkt zweier beliebiger  $(0, 2)$ -Graphen wieder ein  $(0, 2)$ -Graph ist. Dazu untersuchen wir zunächst den Zusammenhang solcher Produkte.

**Proposition 29:** Das Kartesische Produkt zweier zusammenhängender Graphen ist zusammenhängend.

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

**Beweis:** Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei zusammenhängende Graphen und  $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$  zwei beliebige Knoten in  $G_1 \times G_2$ . Da  $G_1$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $(x_0, x_1, \dots, x_{l_1})$  in  $G_1$  mit  $x_0 = u_1$  und  $x_{l_1} = v_1$ . Da  $G_2$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $(y_0, y_1, \dots, y_{l_2})$  in  $G_2$  mit  $y_0 = u_2$  und  $y_{l_2} = v_2$ . Daher ist  $((x_0, u_2), \dots, (x_{l_1}, u_2), (x_{l_1}, y_1), \dots, (x_{l_1}, y_{l_2}))$  ein Weg in  $G_1 \times G_2$  von  $(u_1, u_2)$  nach  $(v_1, v_2)$  und der Graph  $G_1 \times G_2$  ist zusammenhängend. ■

Wie bereits angedeutet, eignet sich das Kartesische Produkt, um neue  $(0, 2)$ -Graphen zu konstruieren.

**Satz 30:** *Das Kartesische Produkt zweier  $(0, 2)$ -Graphen ist ein  $(0, 2)$ -Graph.*

**Beweis:** Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei  $(0, 2)$ -Graphen. Wegen Proposition 29 ist  $G_1 \times G_2$  zusammenhängend. Seien  $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$  zwei beliebige Knoten von  $G_1 \times G_2$  mit mindestens einem gemeinsamen Nachbarn.

Zunächst untersuchen wir, wie die gemeinsame Nachbarschaft beider Knoten aussieht, wenn  $u_1 = v_1$  oder  $u_2 = v_2$  gilt. Ohne Einschränkung sei  $u_1 = v_1 =: w^*$ . Da  $G_2$  ein  $(0, 2)$ -Graph ist, besitzen  $(u_1, u_2)$  und  $(v_1, v_2)$  genau zwei Nachbarn der Gestalt  $(w^*, u)$  mit  $u \in V(G_2)$ . Da alle weiteren gemeinsamen Nachbarn von  $(u_1, u_2)$  und  $(v_1, v_2)$  nicht von dieser Gestalt sind, müssen sie sowohl von der Form  $(w, u_2)$  als auch von der Form  $(w, v_2)$  sein, wobei  $w \neq w^*$  gilt. Wegen  $u_2 \neq v_2$  gibt es daher keine weiteren Nachbarn.

Seien nun  $u_1 \neq v_1$  und  $u_2 \neq v_2$ . Zwei benachbarte Knoten stimmen immer in genau einer Komponente überein. Als gemeinsame Nachbarn von  $(u_1, u_2)$  und  $(v_1, v_2)$  kommen daher nur  $(u_1, v_2)$  und  $(v_1, u_2)$  in Frage. Ohne Einschränkung sei  $(u_1, v_2)$  ein gemeinsamer Nachbar von  $(u_1, u_2)$  und  $(v_1, v_2)$ . Es folgt  $\{u_1, v_1\} \in E(G_1)$  und  $\{u_2, v_2\} \in E(G_2)$ . Daher ist auch  $(v_1, u_2)$  ein gemeinsamer Nachbar von  $(u_1, u_2)$  und  $(v_1, v_2)$ . Der Graph  $G_1 \times G_2$  ist folglich ein  $(0, 2)$ -Graph. ■

Die Aussage von Satz 30 lässt sich nicht auf  $(0, \lambda)$ -Graphen verallgemeinern, da Knoten  $(u_1, u_2)$  und  $(v_1, v_2)$  mit  $u_1 \neq v_1$  und  $u_2 \neq v_2$  stets genau 0 oder 2 gemeinsame Nachbarn besitzen.

Da wir nun in der Lage sind, aus  $(0, 2)$ -Graphen weitere  $(0, 2)$ -Graphen zu konstruieren, bleibt zu klären, ob wir mit diesem Ansatz ein Gegenbeispiel für Payans Vermutung finden können. Die Antwort fällt leider negativ aus.

## 4.2 Das Kartesische Produkt zweier Graphen

**Satz 31:** Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei nichtleere Graphen und  $\chi(G_1)$  beziehungsweise  $\chi(G_2)$  ihre chromatischen Zahlen. Dann gilt  $\chi(G_1 \times G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ .

**Beweis:** Wir setzen  $M := \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ . Der Graph  $G_1 \times G_2$  enthält sowohl  $G_1$  als auch  $G_2$  als Teilgraphen. Daher gilt  $\chi(G_1 \times G_2) \geq M$ .

Wir betrachten eine  $\chi(G_1)$ -Färbung  $\chi_1: V(G_1) \rightarrow \{0, \dots, \chi(G_1) - 1\}$  von  $G_1$  und eine  $\chi(G_2)$ -Färbung  $\chi_2: V(G_2) \rightarrow \{0, \dots, \chi(G_2) - 1\}$  von  $G_2$  und definieren eine Abbildung  $\chi_{12}: V(G_1 \times G_2) \rightarrow \{0, \dots, M - 1\}$  durch  $\chi_{12}(u, v) := \chi_1(u) + \chi_2(v) \pmod{M}$ . Unser Ziel ist es zu zeigen, dass  $\chi_{12}$  eine  $M$ -Färbung von  $G_1 \times G_2$  ist. Seien  $(u_1, u_2)$  und  $(v_1, v_2)$  zwei benachbarte Knoten von  $G_1 \times G_2$ . Ohne Einschränkung ist  $\{u_1, v_1\}$  eine Kante in  $G_1$  und es gilt  $u_2 = v_2$ . Wegen  $\chi_1(u_1) \neq \chi_1(v_1)$  und  $|\chi_1(u_1) - \chi_1(v_1)| < \chi(G_1) \leq M$  gilt  $\chi_{12}(u_1, u_2) \neq \chi_{12}(v_1, v_2)$ . Somit folgt  $\chi(G_1 \times G_2) = M$ . ■

Satz 31 besagt, dass es unendlich viele 3-chromatische  $(0, 2)$ -Graphen gibt, sofern es mindestens einen gibt. Das Kartesische Produkt hilft uns allerdings nicht dabei, ein erstes Gegenbeispiel zu Payans Vermutung zu finden.

Zum Schluss dieses Abschnittes befassen wir uns ein weiteres Mal mit der Abschätzung der Knotenzahl eines  $(0, 2)$ -Graphen in Abhängigkeit seines Grades (vgl. Korollar 11). Wir können zeigen, dass das Verhältnis von  $|V(G)|$  und der oberen Schranke  $2^{d(G)}$  für geeignete  $(0, 2)$ -Graphen  $G$  beliebig klein werden kann. Andererseits ist auch die untere Schranke  $1 + \binom{d(G)}{2}$  in vielen Fällen sehr pessimistisch.

**Satz 32:** Sei  $k \geq 2$  eine natürliche Zahl, zu der mindestens ein  $(0, 2)$ -Graph mit  $\chi(G) = k$  existiert. Dann gilt

$$\inf \left\{ \frac{|V(G)|}{2^{d(G)}} : G \text{ (0, 2)-Graph mit } \chi(G) = k \right\} = 0.$$

Andererseits gibt es eine reelle Zahl  $c > 1$  und unendlich viele  $(0, 2)$ -Graphen  $G$  mit  $\chi(G) = k$  und  $|V(G)| \geq c^{d(G)}$ .

**Beweis:** Zunächst stellen wir fest, dass es einen Graphen  $G$  mit  $\chi(G) = k$  und  $|V(G)| \leq 2^{d(G)-1}$  gibt. Für  $k = 2$  wählen wir dazu den vollständigen Graphen  $G = K_4$ , für  $k \geq 3$  folgt dies aus Korollar 11 und Folgerung 27. Induktiv definieren wir eine Folge  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Graphen durch  $G_1 := G$  und  $G_n := G_{n-1} \times G$  für  $n \geq 2$ . Nach Satz 31 gilt  $\chi(G_n) = k$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Darüber hinaus gilt  $|V(G_n)| = |V(G_{n-1})| \cdot |V(G)| =$

## 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

$|V(G)|^n$  und  $d(G_n) = d(G_{n-1}) + d(G) = n \cdot d(G)$ , also

$$\frac{|V(G_n)|}{2^{d(G_n)}} \leq \frac{2^{n \cdot (d(G)-1)}}{2^{n \cdot d(G)}} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Setzen wir  $c := |V(G)|^{\frac{1}{d(G)}} > 1$ , dann folgt  $|V(G_n)| = |V(G)|^n = c^{n \cdot d(G)} = c^{d(G_n)}$ . ■

## 4.3 Faktorgraphen

Wie bereits in Abschnitt 2.1 erläutert, muss ein Graph im Wesentlichen nur eine lokale Eigenschaft erfüllen, um ein  $(0, \lambda)$ -Graph zu sein. Ist  $G_1$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph und  $G_2$  ein zusammenhängender Graph, den man lokal<sup>2</sup> nicht von  $G_1$  unterscheiden kann, dann ist  $G_2$  auch ein  $(0, \lambda)$ -Graph.

Ein Konzept, um aus einem gegebenen Graphen  $G_1$  einen solchen Graphen  $G_2$  zu konstruieren, basiert auf sogenannten *Automorphismen*, die wir im Folgenden näher studieren werden.

### 4.3.1 Faktorgraphen von $(0, \lambda)$ -Graphen

In diesem Abschnitt werden wir Automorphismen und ihre Anwendung auf die Konstruktion sogenannter *Faktorgraphen* kennenlernen. Des Weiteren untersuchen wir, wie die chromatische Zahl der konstruierten Graphen aussieht.

**Definition 33 (Faktorgraph):** Seien  $G$  ein Graph und  $\Phi: V(G) \rightarrow V(G)$  eine Bijektion. Für einen Knoten  $v \in V(G)$  bezeichne  $[v]_\Phi := \{\Phi^n(v) : n \in \mathbb{N}\}$  die Äquivalenzklasse von  $v$  bezüglich  $\Phi$ . Ist die Menge  $[v]_\Phi$  für jeden Knoten  $v \in V(G)$  eine stabile Menge, dann heißt der Graph  $G|_\Phi$ , definiert durch  $V(G|_\Phi) := \{[v]_\Phi : v \in V(G)\}$  und  $E(G|_\Phi) := \{[u]_\Phi, [v]_\Phi : \{u, v\} \in E(G)\}$ , Faktorgraph von  $G$  bezüglich  $\Phi$ .

Ist klar, welche Abbildung  $\Phi$  gemeint ist, dann schreiben wir auch kurz  $[v]$  statt  $[v]_\Phi$ . Da der Graph  $G|_\Phi$  nur dann definiert ist, wenn die Mengen  $[v]$  stabil sind, enthält dieser keine Kanten der Gestalt  $\{[u], [u]\}$ . Klar ist außerdem, dass der Graph  $G|_\Phi$  zusammenhängend ist, wenn der Graph  $G$  zusammenhängend ist.

---

<sup>2</sup>Was „lokal“ bedeutet, werden wir noch näher spezifizieren.

Im Folgenden definieren wir eine spezielle Bijektion, mit deren Hilfe wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels aus einem Graphen einen neuen Graphen unter Beibehaltung dessen lokaler Gestalt konstruieren.

**Definition 34 (Automorphismus):** Eine Bijektion  $\Phi: V(G) \rightarrow V(G)$  heißt Automorphismus von  $G$ , wenn für alle Knoten  $u, v$  gilt:

$$\{\Phi(u), \Phi(v)\} \in E(G) \iff \{u, v\} \in E(G).$$

Die Menge der Automorphismen eines Graphen  $G$ , versehen mit der Komposition (Hintereinanderausführung) „ $\circ$ “, ist eine Gruppe, die sogenannte *Automorphismengruppe*  $\text{Aut}(G)$ .

Wir werden in Abschnitt 4.3.2 für bestimmte Abbildungen beweisen, dass diese Automorphismen sind. Dazu müssen wir aber nur eine Richtung der Äquivalenz aus Definition 34 nachweisen.

**Proposition 35:** Sei  $\Phi: V(G) \rightarrow V(G)$  eine Bijektion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für alle Knoten  $u, v$  gilt:  $\{u, v\} \in E(G) \implies \{\Phi(u), \Phi(v)\} \in E(G)$ .

(ii) Für alle Knoten  $u, v$  gilt:  $\{\Phi(u), \Phi(v)\} \in E(G) \implies \{u, v\} \in E(G)$ .

Gilt eine der Eigenschaften (i) oder (ii), dann ist  $\Phi$  ein Automorphismus.

**Beweis:** Wir zeigen zunächst die Richtung von (i) nach (ii). Dazu betrachten wir die Abbildung  $f: E(G) \rightarrow \binom{V(G)}{2}$ , definiert durch  $f(\{u, v\}) := \{\Phi(u), \Phi(v)\}$ . Wegen (i) bildet  $f$  nach  $E(G)$  ab. Da  $\Phi$  injektiv ist, ist auch  $f$  injektiv, und wegen  $|E(G)| < \infty$  ist  $f$  auch surjektiv. Sei  $\{\Phi(u), \Phi(v)\}$  eine Kante von  $G$ . Aufgrund der Surjektivität von  $f$  existieren Knoten  $\tilde{u}, \tilde{v}$  mit  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} \in E(G)$  und  $\{\Phi(\tilde{u}), \Phi(\tilde{v})\} = f(\{\tilde{u}, \tilde{v}\}) = \{\Phi(u), \Phi(v)\}$ . Da  $\Phi$  injektiv ist, folgt  $\{u, v\} = \{\tilde{u}, \tilde{v}\} \in E(G)$ .

Die Richtung von (ii) nach (i) folgt, da  $\Phi^{-1}$  existiert und bijektiv ist, aus der Richtung von (i) nach (ii). ■

Nun überlegen wir uns noch, wie groß die Automorphismengruppe eines  $(0, 2)$ -Graphen höchstens ist. Dies leiten wir aus einem Lemma über die Eindeutigkeit eines Automorphismus her.

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

**Lemma 36:** *Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph,  $v^*$  ein Knoten sowie  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  zwei Automorphismen von  $G$  mit  $\Phi_1(w) = \Phi_2(w)$  für alle Knoten  $w$  aus der abgeschlossenen Nachbarschaft von  $v^*$ . Dann gilt  $\Phi_1 = \Phi_2$ .*

**Beweis:** Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass  $\Phi_1 \neq \Phi_2$  gilt. Sei  $u$  ein Knoten mit  $\Phi_1(u) \neq \Phi_2(u)$  und  $d := d_G(u, v^*)$  minimal. Nach Voraussetzung gilt  $d \geq 2$ . Dann gibt es Knoten  $v$  und  $w$  mit  $\{u, v\}, \{v, w\} \in E(G)$ ,  $d_G(v, v^*) = d - 1$  und  $d_G(w, v^*) = d - 2$ . Die Knoten  $u$  und  $w$  besitzen  $v$  als gemeinsamen Nachbarn und damit genau einen weiteren Nachbarn  $v'$ . Für diesen gilt  $d_G(v', v^*) = d - 1$ . Aufgrund der extremalen Wahl von  $u$  gilt  $\Phi_1(v) = \Phi_2(v) =: \tilde{v}$ ,  $\Phi_1(v') = \Phi_2(v') =: \tilde{v}'$  und  $\Phi_1(w) = \Phi_2(w) =: \tilde{w}$ . Da  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  Automorphismen von  $G$  sind, sind  $\tilde{w}$ ,  $\Phi_1(u)$  und  $\Phi_2(u)$  gemeinsame Nachbarn von  $\tilde{v}$  und  $\tilde{v}'$ . Wir setzen  $\tilde{v}^* := \Phi_1(v^*) = \Phi_2(v^*)$ . Dann gilt  $d_G(\tilde{w}, \tilde{v}^*) = d - 2 < d = d_G(\Phi_1(u), \tilde{v}^*) = d_G(\Phi_2(u), \tilde{v}^*)$ , das heißt die Knoten  $\tilde{w}$ ,  $\Phi_1(u)$  und  $\Phi_2(u)$  sind paarweise verschieden. Das ist aber ein Widerspruch, da  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph ist. ■

Da ein Automorphismus eindeutig über das Bild eines Knotens und sowie die Bilder aller seiner Nachbarn beschrieben werden kann, können wir die Mächtigkeit der Automorphismengruppe  $\text{Aut}(G)$  eines  $(0, 2)$ -Graphen  $G$  durch seine Knotenzahl und seinen Grad nach oben abschätzen.

**Folgerung 37:** *Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph mit  $n$  Knoten und Valenz  $d$  sowie  $\text{Aut}(G)$  seine Automorphismengruppe. Dann gilt  $|\text{Aut}(G)| \leq d! \cdot n$ .*

**Beweis:** Seien  $v^*$  ein beliebiger Knoten und  $v_1, \dots, v_d$  seine Nachbarn. Wir setzen

$$\mathcal{N} := \{(w, w_1, \dots, w_d) : w \in V(G), \{w_1, \dots, w_d\} = N_G(w)\} \subseteq V^{d+1}$$

und betrachten die Abbildung  $f: \text{Aut}(G) \rightarrow V^{d+1}$ , definiert durch

$$f(\Phi) := (\Phi(v^*), \Phi(v_1), \dots, \Phi(v_d)).$$

Da Automorphismen bijektive Abbildungen sind und benachbarte Knoten wieder auf benachbarte Knoten abbilden, gilt  $f(\Phi) \in \mathcal{N}$  für alle  $\Phi \in \text{Aut}(G)$ . Wegen Lemma 36 ist die Abbildung  $f$  injektiv und so erhalten wir  $|\text{Aut}(G)| \leq |\mathcal{N}| = d! \cdot n$ . ■

Automorphismen sind für unser Ziel, aus einem Graphen  $G_1$  einen Graphen  $G_2$  zu konstruieren, der lokal aussieht wie der Ausgangsgraph  $G_1$ , nicht ausreichend. Wir benötigen spezielle Automorphismen.

**Definition 38 ( $k$ -lokaler Automorphismus):** Seien  $G$  ein Graph,  $k$  eine nicht-negative ganze Zahl. Ein Automorphismus  $\Phi$  von  $G$  heißt  $k$ -lokal, wenn für alle Knoten  $u \neq v \in V(G)$  mit  $[u]_\Phi = [v]_\Phi$  gilt:  $d_G(u, v) \geq 2k + 2$ .

**Beobachtung 39:**

1. Jeder  $(k + 1)$ -lokale Automorphismus ist auch ein  $k$ -lokaler Automorphismus.
2. Ist  $\Phi$  ein 0-lokaler Automorphismus, dann ist  $[v]_\Phi$  für jeden Knoten  $v \in V(G)$  eine stabile Menge. Der Graph  $G_\Phi$  ist daher wohldefiniert.

Folgende Eigenschaft werden wir häufig verwenden.

**Proposition 40:** Seien  $G$  ein Graph,  $u, v$  zwei Knoten und  $\Phi$  ein 0-lokaler Automorphismus von  $G$ . Dann ist  $\{[u], [v]\}$  genau dann eine Kante in  $G_\Phi$ , wenn es einen Knoten  $w \in [v]$  gibt, sodass  $\{u, w\}$  eine Kante in  $G$  ist. Insbesondere gilt  $d_{G|_\Phi}([v]) \leq d_G(v)$ .

**Beweis:** Gibt es einen Knoten  $w \in [v]$  mit  $\{u, w\} \in E(G)$ , dann gilt  $\{[u], [v]\} = \{[u], [w]\} \in E(G_\Phi)$ . Ist umgekehrt  $\{[u], [v]\}$  eine Kante in  $G_\Phi$ , dann gibt es Knoten  $\tilde{u} \in [u]$  und  $\tilde{v} \in [v]$  mit  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} \in E(G)$ . Sei  $n$  eine natürliche Zahl mit  $u = \Phi^n(\tilde{u})$ . Wir setzen  $w := \Phi^n(\tilde{v}) \in [\tilde{v}] = [v]$ . Da  $\Phi$  ein Automorphismus und  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$  eine Kante von  $G$  ist, gilt  $\{u, w\} = \{\Phi^n(\tilde{u}), \Phi^n(\tilde{v})\} \in E(G)$ .

Seien  $[w_1], \dots, [w_l]$  die Nachbarn von  $[v]$  in  $G|_\Phi$ . Dann besitzt  $v$  Nachbarn  $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_l$  mit  $\tilde{w}_i \in [w_i]$ . Diese sind paarweise verschieden und es folgt  $d_G(v) \geq l$ . ■

Faktorgraphen, die mit Hilfe von  $k$ -lokalen Automorphismen konstruiert werden, kann man lokal nicht von dem ursprünglichen Graphen unterscheiden. Je größer der Parameter  $k$  ist, desto größer ist die Umgebung um einen Knoten, in der man beide Graphen mit Sicherheit nicht unterscheiden kann.

**Satz 41:** Seien  $G$  ein Graph und  $\Phi$  ein  $k$ -lokaler Automorphismus. Dann gilt für alle Knoten  $v$  von  $G$ :

$$G|_\Phi[\{[u]: d_{G|_\Phi}([u], [v]) \leq k\}] \cong G[\{u: d_G(u, v) \leq k\}].$$

**Beweis:** Wir setzen  $U := \{u: d_G(u, v) \leq k\}$  und  $W := \{u: d_G(u, v) = k+1\}$  und zeigen, dass für jeden Knoten  $u \in U$  und jeden Knoten  $\tilde{u} \in U \cup W$  gilt:  $[\tilde{u}] = [u] \implies \tilde{u} = u$ . Sei  $\tilde{u} \in U \cup W$  mit  $[\tilde{u}] = [u]$ . Dann gilt  $d_G(u, \tilde{u}) \leq d_G(u, v) + d_G(v, \tilde{u}) \leq k + (k+1) < 2k+2$ .

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Da  $\Phi$  ein  $k$ -lokaler Automorphismus ist, folgt  $\tilde{u} = u$ . Insbesondere sind die Knoten  $[u]$  mit  $u \in U$  paarweise verschieden.

Die Graphen  $G|_{\Phi}[\{[u]: u \in U\}]$  und  $G[U]$  sind isomorph: Ist  $\{u, w\}$  eine Kante von  $G[U]$ , dann ist  $\{[u], [w]\}$  eine Kante von  $G|_{\Phi}[\{[u]: u \in U\}]$ . Sei  $\{[u], [w]\}$  eine Kante von  $G|_{\Phi}[\{[u]: u \in U\}]$ . Dann gibt es nach Proposition 40 einen Knoten  $\tilde{w} \in [w]$  mit  $\{u, \tilde{w}\} \in E(G)$ , das heißt  $\tilde{w}$  liegt in  $U \cup W$ . Wegen  $[w] = [w]$  und obiger Feststellung folgt  $\tilde{w} = w$ .  $G[U]$  enthält daher die Kante  $\{u, w\} = \{u, \tilde{w}\}$ .

Insbesondere gilt  $\{[u]: u \in U\} = \{[u]: d_G(u, v) \leq k\} \subseteq \{[u]: d_{G|_{\Phi}}([u], [v]) \leq k\}$ . Es bleibt Gleichheit zu zeigen. Dazu führen wir die Gegenannahme zum Widerspruch. Sei  $w^* \in V(G)$  mit  $[w^*] \notin \{[u]: u \in U\}$  und  $d := d_{G|_{\Phi}}([w^*], [v])$  minimal, also insbesondere  $1 \leq d \leq k$ . Dann gibt es ein  $w$  mit  $d_{G|_{\Phi}}([w], [v]) = d - 1 \leq k - 1$  und  $\{[w], [w^*]\} \in E(G|_{\Phi})$ . Aufgrund der Minimalität von  $w^*$  gilt  $[w] \in \{[u]: u \in U\}$ . Ohne Einschränkung sei  $w \in U$ . Seien  $u_1, \dots, u_l$  die Nachbarn von  $w$  in  $G$ . Diese liegen alle in  $U$ . Wegen obiger Isomorphie sind  $[u_1], \dots, [u_l] \in \{[u]: u \in U\}$  (paarweise verschiedene) Nachbarn von  $[w]$  in  $G|_{\Phi}$ . Wegen  $[w^*] \notin \{[u]: u \in U\}$  ist  $[w^*]$  ein weiterer Nachbar von  $[w]$  in  $G|_{\Phi}$  und es folgt  $d_{G|_{\Phi}}([w]) \geq d_G(w) + 1$ , was ein Widerspruch zu Proposition 40 ist. ■

Satz 41 erlaubt es uns, aus  $(0, \lambda)$ -Graphen weitere  $(0, \lambda)$ -Graphen zu konstruieren, sofern wir einen nichttrivialen<sup>3</sup>  $k$ -lokalen Automorphismus für einen hinreichend großen Parameter  $k$  gegeben haben.

**Folgerung 42:** *Seien  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph und  $\Phi$  ein 2-lokaler Automorphismus von  $G$ . Dann ist  $G|_{\Phi}$  ebenfalls ein  $(0, \lambda)$ -Graph.*

**Beweis:** Seien  $u, v \in V(G)$  mit  $[u] \neq [v]$  mit mindestens einen gemeinsamen Nachbarn. Dann gilt  $d_{G|_{\Phi}}([u], [v]) \leq 2$ . Da die Graphen  $G|_{\Phi}[\{[w]: d_{G|_{\Phi}}([w], [v]) \leq 2\}]$  und  $G[\{w: d_G(w, v) \leq 2\}]$  nach Satz 41 isomorph sind, gibt es einen Knoten  $w \in V(G)$  mit  $|N_G(w) \cap N_G(v)| = |N_{G|_{\Phi}}([u]) \cap N_{G|_{\Phi}}([v])| \geq 1$ . Da  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph ist, folgt  $|N_{G|_{\Phi}}([u]) \cap N_{G|_{\Phi}}([v])| = \lambda$  wie gewünscht. ■

Für  $(0, 2)$ -Graphen ist Folgerung 42 ein Spezialfall von [Bro06], Abschnitt 5, wenn man als zugrunde liegende Automorphismengruppe die Menge  $\{\Phi^n: n \in \mathbb{N}\}$  wählt.

<sup>3</sup>Wir bezeichnen die identische Abbildung als trivialen Automorphismus.

Dort wird auch festgehalten, dass die Forderung nach der 2-Lokalität von  $\Phi$ , die wir bislang für die Erhaltung der lokalen Struktur benötigt haben, noch etwas abgeschwächt werden kann. Dies soll jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Wir können aus einem  $k$ -lokalen Automorphismus  $\Phi$  mit Hilfe eines beliebigen Automorphismus  $\Psi$  einen neuen  $k$ -lokalen Automorphismus  $\Theta$  konstruieren.

**Satz 43:** *Seien  $G$  ein Graph und  $\Phi$  und  $\Psi$  zwei Automorphismen von  $G$ . Dann ist die Komposition  $\Theta := \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi$  genau dann ein  $k$ -lokaler Automorphismus, wenn  $\Phi$  ein  $k$ -lokaler Automorphismus ist.*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass  $\Theta$  ein  $k$ -lokaler Automorphismus ist, wenn  $\Phi$  ein  $k$ -lokaler Automorphismus ist. Offenbar sind die Inverse eines Automorphismus und die Komposition mehrerer Automorphismen wieder Automorphismen. Wir brauchen nur zu zeigen, dass  $\Theta$   $k$ -lokal ist. Seien  $u \neq v$  zwei Knoten mit  $[u]_{\Theta} = [v]_{\Theta}$ . Dann existiert eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $v = \Theta^n(u) = (\Psi^{-1} \circ \Phi^n \circ \Psi)(u)$ . Da  $\Psi$  ein Automorphismus ist, gilt  $d_G(u, v) = d_G(\Psi(u), \Psi(v)) = d_G(u', v')$  mit  $u' := \Psi(u)$  und  $v' := \Psi(v) = \Phi^n(u')$ , also  $[u']_{\Phi} = [v']_{\Phi}$ . Wegen  $u \neq v$  und der Injektivität von  $\Psi$  gilt  $u' \neq v'$ . Da  $\Phi$   $k$ -lokal ist, folgt  $d_G(u, v) = d_G(u', v') \geq 2k + 2$ . Daher ist  $\Theta$  auch  $k$ -lokal.

Sei nun  $\Theta$  ein  $k$ -lokaler Automorphismus. Dann ist  $\Phi = (\Psi^{-1})^{-1} \circ \Theta \circ \Psi^{-1}$  aufgrund der ersten Richtung ebenfalls ein  $k$ -lokaler Automorphismus. ■

Wieder stellt sich die Frage, ob wir aus einem  $(0, \lambda)$ -Graphen einen 3-chromatischen Faktorgraphen konstruieren können. Folgender Satz wird Aufschluss darüber geben.

**Satz 44:** *Seien  $G$  ein Graph,  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $G$  und  $k$  eine natürliche Zahl. Dann sind äquivalent:*

- (i)  $G|_{\Phi}$  ist  $k$ -färbbar.
- (ii)  $G$  besitzt eine  $k$ -Färbung  $\chi$  mit  $\chi = \chi \circ \Phi$ .
- (iii)  $G$  besitzt eine  $k$ -Färbung, die alle Knoten einer Äquivalenzklasse mit der gleichen Farbe färbt.

**Beweis:** Sei  $\chi_{\Phi}$  eine  $k$ -Färbung von  $G|_{\Phi}$ . Wir definieren eine Abbildung  $\chi$  durch  $\chi(v) := \chi_{\Phi}([v])$  für alle  $v \in V(G)$ . Wir zeigen, dass  $\chi$  eine  $k$ -Färbung von  $G$  mit  $\chi = \chi \circ \Phi$  ist. Sei  $\{u, v\}$  eine Kante von  $G$ . Dann ist  $\{[u], [v]\}$  eine Kante von  $G|_{\Phi}$  und es folgt  $\chi(u) = \chi_{\Phi}([u]) \neq \chi_{\Phi}([v]) = \chi(v)$ . Außerdem gilt  $\chi(v) = \chi_{\Phi}([v]) =$

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

$\chi_\Phi([\Phi(v)]) = \chi(\Phi(v))$ , also  $\chi = \chi \circ \Phi$ .

Seien  $\chi$  eine  $k$ -Färbung von  $G$  mit  $\chi = \chi \circ \Phi$  und  $u, v \in V(G)$  mit  $[u] = [v]$ . Dann gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $u = \Phi^n(v)$  und es folgt  $\chi(u) = \chi(\Phi^n(v)) = \chi(v)$ . Alle Äquivalenzklassen sind daher einfarbig.

Sei  $\chi$  eine  $k$ -Färbung von  $G$ , die alle Knoten einer Äquivalenzklasse mit der gleichen Farbe färbt. Wir definieren eine Abbildung  $\chi_\Phi$  durch  $\chi_\Phi([v]) := \chi(v)$  für alle Knoten  $v \in V(G)$ . Nach Voraussetzung ist diese wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass  $\chi_\Phi$  eine  $k$ -Färbung von  $G|_\Phi$  ist. Sei  $\{[u], [v]\}$  eine Kante von  $G|_\Phi$ . Dann gibt es nach Proposition 40 einen Knoten  $w \in V(G)$  mit  $\{u, w\} \in E(G)$  und  $[w] = [v]$  und es folgt  $\chi_\Phi([u]) = \chi(u) \neq \chi(w) = \chi_\Phi([w]) = \chi_\Phi([v])$ . ■

Um mit dem Konzept des Faktorgraphen ein (erstes) Gegenbeispiel zu Payans Vermutung zu konstruieren, müssen wir 2-lokale Automorphismen von 2-chromatischen  $(0, 2)$ -Graphen untersuchen. Glücklicherweise kennen wir bereits unendlich viele 2-chromatische  $(0, 2)$ -Graphen - Würfelgraphen. Daher werden wir in Abschnitt 4.3.2 deren Automorphismen studieren.

Der Fall, dass der Faktorgraph wieder 2-chromatisch ist, interessiert uns nicht. Glücklicherweise können wir diesen gut beschreiben.

**Folgerung 45:** *Seien  $G$  ein Graph und  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $G$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $G|_\Phi$  ist 2-färbbar.
- (ii)  $G$  ist 2-färbbar und es existiert ein  $v \in V(G)$ , sodass  $d_G(v, \Phi(v))$  gerade ist.
- (iii)  $G$  ist 2-färbbar und für alle  $v \in V(G)$  ist  $d_G(v, \Phi(v))$  gerade.

**Beweis:** Sei  $G|_\Phi$  2-färbbar. Nach Satz 44 besitzt  $G$  eine 2-Färbung mit  $\chi = \chi \circ \Phi$ . Sei  $v$  ein ausgezeichneter Knoten von  $G$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, ist  $\chi$  bis auf Umbenennung der Farben eindeutig bestimmt: Alle Knoten, die geraden Abstand von  $v$  in  $G$  haben, werden durch  $\chi$  mit einer Farbe  $c_1$  gefärbt, die restlichen Knoten mit einer Farbe  $c_2$ . Wegen  $\chi(v) = \chi(\Phi(v))$  ist  $d_G(v, \Phi(v))$  gerade.

Seien  $G$  2-färbbar,  $v$  ein Knoten mit  $d_G(v, \Phi(v))$  gerade und  $u$  ein beliebiger Knoten. Des Weiteren seien  $(u_0, u_1, \dots, u_{l_1})$  ein kürzester Weg mit  $u_0 = u$  und  $u_{l_1} = \Phi(u)$ ,  $(v_0, v_1, \dots, v_{l_2})$  ein kürzester Weg mit  $v_0 = v$  und  $v_{l_2} = \Phi(v)$  sowie  $(w_0, w_1, \dots, w_l)$

ein Weg mit  $w_0 = u$  und  $w_l = v$ . Da  $\Phi$  ein Automorphismus von  $G$  ist, ist

$$(w_0, \dots, w_l, v_1, \dots, v_{l_2}, \Phi(w_{l-1}), \dots, \Phi(w_0), u_{l_1-1}, \dots, u_0)$$

ein Kreis der Länge  $l_1 + l_2 + 2l$ . Außerdem gilt  $l_1 = d_G(u, \Phi(u))$  und  $l_2 = d_G(v, \Phi(v))$ . Da der Graph  $G$  2-färbbar ist, enthält er keinen ungeraden Kreis und es folgt, dass  $d_G(u, \Phi(u))$  gerade ist.

Sei  $G$  2-färbbar und für alle  $v \in V(G)$  sei  $d_G(v, \Phi(v))$  gerade. Wir bereits erwähnt, besitzt  $G$  bis auf Umbenennung der Farben genau eine 2-Färbung  $\chi$ . Da  $v$  und  $\Phi(v)$  geraden Abstand besitzen, werden sie mit derselben Farbe gefärbt. Damit gilt  $\chi = \chi \circ \Phi$  und wegen Satz 44 ist  $G|_\Phi$  2-färbbar. ■

Um eine bessere Vorstellung von der Gestalt von Faktorgraphen zu bekommen, betrachten wir abschließend noch folgende Aussage.

**Satz 46:** *Seien  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $G$ . Dann gilt  $|[u]| = |[v]|$  für alle  $u, v \in V(G)$ . Insbesondere ist  $|V(G|_\Phi)|$  ein Teiler von  $|V(G)|$ .*

**Beweis:** Seien  $u$  und  $v$  zwei Knoten von  $G$  und  $n := |[u]| \leq |[v]|$ . Ohne Einschränkung können wir  $u$  und  $v$  als benachbart annehmen. Da  $\Phi$  ein Automorphismus und  $\{u, v\}$  eine Kante in  $G$  ist, ist auch  $\{u, \Phi^n(v)\} = \{\Phi^n(u), \Phi^n(v)\}$  eine Kante in  $G$  und es gilt  $d_G(v, \Phi^n(v)) \leq 2 < 4$ . Weil  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus ist und  $[v] = [\Phi^n(v)]$  gilt, folgt  $v = \Phi^n(v)$  und damit  $n = |[u]| \leq |[v]| \leq n$ . ■

In Beispiel 49 sind einige Faktorgraphen abgebildet, die man mit Hilfe des am Anfang von Abschnitt 4.3.2 eingeführten Automorphismus erhält.

### 4.3.2 Faktorgraphen von Würfelgraphen

In diesem Abschnitt studieren wir die Automorphismen von Würfelgraphen und gehen der Frage nach, ob sich mit Hilfe von 2-lokalen Automorphismen aus Würfelgraphen 3-chromatische  $(0, 2)$ -Graphen konstruieren lassen. Der erste Teil dieses Abschnittes beschäftigt sich mit einem ganz speziellen Automorphismus, während im zweiten Teil eine Charakterisierung der Menge aller  $k$ -lokalen Automorphismen von Würfelgraphen gegeben wird.

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Ein leicht zu beschreibender Automorphismus des Würfelgraphen  $Q_n$ , den wir im Folgenden betrachten wollen, ist die Abbildung eines Knotens auf seinen „gegenüberliegenden“ Knoten.

Der Symmetrie halber ersetzen wir die 0en der 0-1-Vektoren durch  $-1$ en und erhalten anstatt der Knotenmenge  $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$  die Knotenmenge  $V(Q_n) = \{-1, 1\}^n$ . Dies ist eine reine Formalität. Damit können wir den bereits erwähnten Automorphismus, den wir im Folgenden mit  $\Phi_n$  bezeichnen wollen, sehr einfach definieren:  $\Phi_n(v) := -v$ , wobei  $-v := (-1) \cdot v$  eine skalare Multiplikation im Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  ist.

Offenbar ist  $\Phi_n$  ein Automorphismus, alle Äquivalenzklassen sind zweielementig und es gilt  $d_{Q_n}(v, \Phi_n(v)) = n$  für alle Knoten  $v$ . Daher ist  $\Phi_n$  genau für  $n \geq 2k+2$   $k$ -lokal. Der Faktorgraph  $Q_n|_{\Phi_n}$  ist ebenfalls von einfacher Gestalt. Es ist der Distanzgraph  $Q_{n-1}[1, n-1]$ , eine Art Würfelgraph, aber zusätzlich mit Diagonalen.

**Satz 47:** *Sei  $n \geq 2$ . Dann gilt  $Q_n|_{\Phi_n} \cong Q_{n-1}[1, n-1]$ .*

**Beweis:** Der Würfelgraph  $Q_n$  ist zusammengesetzt aus zwei Kopien  $Q'$  und  $Q''$  des  $Q_{n-1}$ , die entsprechend verbunden sind. Sei  $V(Q') = \{v'_1, \dots, v'_m\}$  mit  $m := 2^{n-1}$ . Da  $\Phi_n$  Knoten von  $Q'$  auf Knoten von  $Q''$  abbildet, sind  $[v'_1], \dots, [v'_m]$  paarweise verschieden. Wegen  $|V(Q_n|_{\Phi_n})| = m$  gilt  $V(Q_n|_{\Phi_n}) = \{[v'_1], \dots, [v'_m]\}$ . Da die  $v'_i$  wie  $Q_{n-1}$  verbunden sind, gilt dies auch für die  $[v'_i]$  und wir erhalten  $Q_{n-1} \subseteq Q_n|_{\Phi_n}$ . Kanten innerhalb von  $Q''$  liefern in  $Q_n|_{\Phi_n}$  keine neuen Kanten. Hinzu kommen Kanten der Form  $\{[v'], [v'']\}$  für alle Kanten  $\{v', v''\}$  zwischen  $Q'$  und  $Q''$ . Jeder Knoten  $v'$  hat genau einen Nachbarn  $v''$  in  $Q''$ . Das ist seine entsprechende Kopie in  $Q''$ . Es gilt  $\Phi_n(v'') = \tilde{v}'$ , wobei  $\tilde{v}'$  der in  $Q'$  gegenüberliegende Knoten von  $v'$  ist. Die zusätzlichen Kanten sind also genau die Kanten der Form  $\{[v'], [v'']\} = \{[v'], [\tilde{v}']\}$ . Dies sind gerade die Diagonalen in  $Q'$ . ■

Wir können nun zeigen, dass solche Faktorgraphen  $Q_n|_{\Phi_n}$  keine Gegenbeispiele für Payans Vermutung sind.

**Folgerung 48:** *Seien  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl und  $\chi(Q_n|_{\Phi_n})$  die chromatische Zahl von  $Q_n|_{\Phi_n}$ . Dann gilt*

$$\chi(Q_n|_{\Phi_n}) = \begin{cases} 2 & : \quad n \text{ gerade,} \\ 4 & : \quad n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Beweis:** Da nach Satz 47  $Q_n|_{\Phi_n} \cong Q_{n-1}[1, n-1]$  gilt, ist die Aussage für  $n = 2$  und  $n = 3$  klar:  $\chi(Q_1[1, 1]) = \chi(Q_1) = 2$  und  $\chi(Q_2[1, 2]) = \chi(K_4) = 4$ . Für  $n \geq 4$  ist  $\Phi_n$  1-lokal und wir können Folgerung 45 anwenden. Daher gilt  $\chi(Q_n|_{\Phi_n}) = 2$  genau dann, wenn  $n$  gerade ist.

Für ungerade Zahlen  $n$  gilt daher  $3 \leq \chi(Q_n|_{\Phi_n}) \leq 4$ . (Die obere Schranke kann man sich leicht überlegen.) Sokolová zeigte  $\chi(Q_n|_{\Phi_n}) = 4$  ([Sok87]). ■

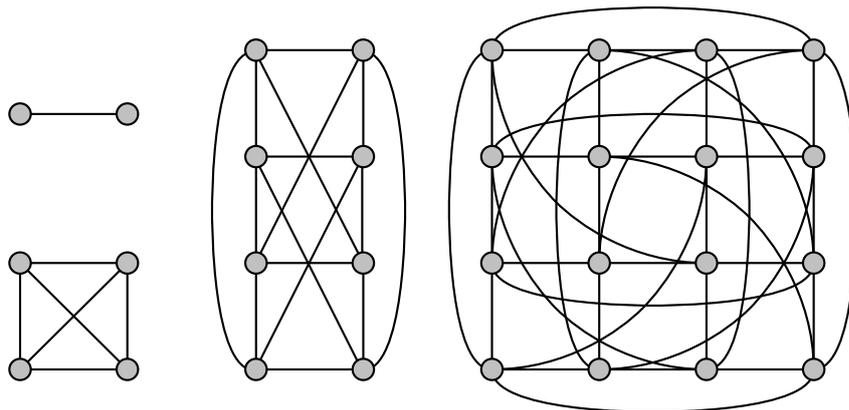
Wie Payan bemerkte ([Pay92]), ist ein anderer Grund, warum  $\chi(Q_n|_{\Phi_n}) \neq 3$  gilt, die Tatsache, dass  $Q_{n-1}[1, n-1]$  ein würfelähnlicher Graph ist.

Da 2-Lokalität eines Automorphismus nur hinreichend dafür ist, dass der zugehörige Faktorgraph eines  $(0, 2)$ -Graphen ein  $(0, 2)$ -Graph ist, betrachten wir noch die Faktorgraphen der Würfelgraphen  $Q_n$  für  $n \in \{2, \dots, 5\}$ . Aufgrund von Folgerung 48 brauchen wir uns aber keine Hoffnung machen, dass einer dieser Faktorgraphen ein Gegenbeispiel zu Payans Vermutung ist.

In folgendem Beispiel sehen wir auch, dass sich die Aussage von Satz 19 nicht auf beliebige  $(0, 2)$ -Graphen verallgemeinern lässt.

**Beispiel 49:**

Die folgende Abbildung zeigt die Graphen  $Q_2|_{\Phi_2}$ ,  $Q_3|_{\Phi_3}$ ,  $Q_4|_{\Phi_4}$  und  $Q_5|_{\Phi_5}$ .



$Q_2|_{\Phi_2}$  und  $Q_3|_{\Phi_3}$  sind  $(0, 2)$ -Graphen.  $Q_4|_{\Phi_4}$  ist kein  $(0, 2)$ -Graph: Zum Beispiel besitzen die Knoten  $[(0, 0, 0, 1)]$  und  $[(0, 0, 1, 0)]$  3 gemeinsame Nachbarn: Die Knoten  $[(0, 0, 0, 0)]$  und  $[(0, 0, 1, 1)]$  und zusätzlich den Knoten  $[(1, 0, 0, 1)] = [(0, 1, 1, 0)]$ .

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Der Faktorgraph  $Q_5|_{\Phi_5}$  ist wieder ein  $(0, 2)$ -Graph. Er enthält kein Dreieck, aber zum Beispiel bilden die Knoten  $[(0, 0, 0, 0, 0)]$ ,  $[(0, 0, 0, 0, 1)]$ ,  $[(0, 0, 0, 1, 1)]$ ,  $[(1, 0, 0, 1, 1)] = [(0, 1, 1, 0, 0)]$  und  $[(0, 0, 1, 0, 0)]$  einen Kreis der Länge 5.

Die Anwendung des Automorphismus  $\Phi_n$  liefert kein Gegenbeispiel für Payans Vermutung. Daher untersuchen wir weitere Automorphismen auf Würfelgraphen.

Wir können  $\Phi_n$  als Punktspiegelung von  $V(Q_n)$  am Koordinatenursprung auffassen. Es liegt daher nahe, andere lineare Abbildungen zu betrachten. Setzt man eine solche in Form einer Matrix an, stellt man fest, dass diese genau dann ein Automorphismus ist, wenn ihre Einträge nur 0en, 1en und  $-1$ en sind und jede Zeile und jede Spalte genau einen Nichtnulleintrag besitzt.

Im Rest dieses Abschnittes zeigen wir nicht nur, dass jede solche lineare Abbildung ein Automorphismus ist, sondern auch, dass jeder Automorphismus eine solche lineare Abbildung ist.

**Definition 50 (Verallgemeinerte Permutationsmatrix, VPM):** *Eine Matrix  $M \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ , die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Nichtnulleintrag besitzt, heißt Verallgemeinerte Permutationsmatrix, kurz VPM.*

Um den Beweis des folgenden Satzes nicht allzu sehr in die Länge zu ziehen, halten wir an dieser Stelle noch eine Vorüberlegung fest. Für einen Vektor  $w = (w_1, \dots, w_n)$  definieren wir  $|w| := (|w_1|, \dots, |w_n|)$ . Des Weiteren sei  $e_i$  der  $i$ -te Koordinateneinheitsvektor. Dann sind zwei Knoten  $u, v \in V(Q_n) = \{-1, 1\}^n$  genau dann benachbart in  $Q_n$ , wenn  $|u - v| = 2e_i$  für einen geeigneten Index  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt.

Nun können wir die Automorphismen von Würfelgraphen beschreiben.

**Satz 51:** *Für eine Abbildung  $\Phi: V(Q_n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\Phi$  ist ein Automorphismus.
- (ii)  $\Phi$  ist eine VPM.

**Beweis:** Seien  $\Phi$  eine VPM und  $u, v \in V(Q_n) = \{-1, 1\}^n$  zwei benachbarte Vektoren, das heißt  $|u - v| = 2e_i$  für ein geeignetes  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ohne Einschränkung gelte  $u - v = 2e_i$ . Offenbar sind  $\Phi(u)$  und  $\Phi(v)$  wieder Knoten von  $Q_n$ . Da  $\Phi$  linear ist, gilt

$|\Phi(u) - \Phi(v)| = |\Phi(u-v)| = |2\Phi(e_i)| = 2e_j$  für ein geeignetes  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Daher sind  $\Phi(u)$  und  $\Phi(v)$  in  $Q_n$  ebenfalls benachbart. Nach Proposition 35 ist damit gezeigt, dass  $\Phi$  ein Automorphismus ist.

Nach Folgerung 37 besitzt  $Q_n$  maximal  $n! \cdot 2^n$  Automorphismen. Auf der anderen Seite gibt es genau  $n! \cdot 2^n$  verallgemeinerte Permutationsmatrizen. Diese sind alle Automorphismen. Daher ist jeder Automorphismus eine VPM. ■

Wie wir gesehen haben, ist es nicht schwer, die Automorphismen von Würfelgraphen zu beschreiben. Der aufwändigste Teil dieses Abschnittes wird sein, zu beschreiben, wann ein Automorphismus eines Würfelgraphen  $k$ -lokal ist. Dabei schließen wir in unseren Betrachtungen den trivialen Automorphismus  $\text{id}_{V(Q_n)}$  aus.

Da alle Automorphismen linear sind, schreiben wir ab jetzt  $L$  anstatt  $\Phi$ .

Verallgemeinerte Permutationsmatrizen vertauschen die Einträge der Vektoren (Knoten) von  $Q_n$  zyklisch, eventuell kombiniert mit Vorzeichenwechseln. Daher ist klar, dass sich  $L$  durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer geeigneten Permutationsmatrix  $P$  auf eine Blockdiagonalmatrix  $D$  der Form  $D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$  mit

$$D_i = [\pm 1] \text{ oder } D_i = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \pm 1 \\ \pm 1 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

transformieren lässt:  $L = P^{-1}DP = P^TDP$ . Die Blöcke  $D_i$  nennen wir die *Zyklen* von  $L$  beziehungsweise  $D$ . Matrizen, die von der Gestalt (4.1) sind, bezeichnen wir als *einfache VPM*. Die *Länge* eines Zyklus ist die Anzahl seiner Zeilen beziehungsweise seiner Spalten.

Aufgrund der folgenden Beobachtung können wir in vielen Fällen ohne Einschränkung  $L = D$  annehmen.

**Beobachtung 52:** Seien  $P$  eine Permutationsmatrix,  $L_1$  eine VPM,  $L_2 = P^T L_1 P$  und  $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Dann gilt:

1.  $L_2^k = P^T L_1^k P$  und  $\det L_1^k = \det L_2^k$
2.  $\min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, L_1^k v) = \min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, L_2^k v)$
3.  $L_1$  ist  $k$ -lokaler Automorphismus  $\iff L_2$  ist  $k$ -lokaler Automorphismus

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Zur Erinnerung: Der Hamming-Abstand  $d_H$  zweier binärer Vektoren ist die Anzahl an Stellen, in denen sie sich unterscheiden.

**Beweis:** Induktiv gilt  $L_2^k = L_2^{k-1}L_2 = P^T L_1^{k-1} P P^T L_1 P = P^T L_1^k P$  wegen  $P^{-1} = P^T$ . Damit folgt  $\det L_2^k = \det P^T \det L_1^k \det P = \det L_1^k$ . Aufgrund der Bijektivität von  $P: V(Q_n) \rightarrow V(Q_n)$  und wegen  $d_H(Pu, Pv) = d_H(u, v)$  gilt

$$\begin{aligned} \min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, L_1^k v) &= \min_{v \in V(Q_n)} d_H(Pv, L_1^k Pv) = \min_{v \in V(Q_n)} d_H(P^T Pv, P^T L_1^k Pv) \\ &= \min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, L_2^k v). \end{aligned}$$

Punkt 3 folgt aus Satz 43 und der Tatsache, dass  $P$  insbesondere eine VPM und damit ein Automorphismus von  $Q_n$  ist. ■

Um die  $k$ -lokalen Automorphismen von Würfelgraphen zu charakterisieren, werden wir notwendige Bedingungen herleiten und am Ende beweisen, dass diese zusammen auch hinreichend sind.

Nach Satz 46 ist eine notwendige Bedingung für einen 1-lokalen Automorphismus die *Fixpunktfreiheit* in  $V(Q_n)$ : Es gibt keinen Knoten  $v$  mit  $Lv := L(v) = v$ . Das ist das erste Kriterium, auf das wir uns konzentrieren werden.

**Proposition 53:** Sei  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine VPM mit einem Zyklus. Dann gilt

$$\min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, Lv) = \begin{cases} 0 & : \det L = 1, \\ 1 & : \det L = -1. \end{cases}$$

Insbesondere besitzt  $L$  genau dann einen Fixpunkt, wenn  $\det L = 1$  gilt.

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $L = D$  eine einfache VPM. Für  $n = 1$  ist die Aussage korrekt. Seien also  $n \geq 2$  und  $q_1, \dots, q_n$  die Nichtnulleinträge der Zeilen  $1, \dots, n$  von  $D$ . Wir betrachten den Knoten  $v^* \in V(Q_n)$  mit den Einträgen  $v_k^* := \prod_{l=k}^n q_l$ . Für die  $k$ -te Komponente von  $Dv^*$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , ergibt sich

$$(Dv^*)_k = q_k \cdot v_{k+1}^* = q_k \cdot \prod_{l=k+1}^n q_l = \prod_{l=k}^n q_l = v_k^*.$$

Für den  $n$ -ten Eintrag von  $Dv^*$  gilt

$$(Dv^*)_n = q_n \cdot v_1^* = q_n \cdot \prod_{l=1}^n q_l = q_n \cdot \det D = v_n^* \cdot \det D.$$

Gilt  $\det D = 1$ , so erhalten wir  $d_H(v^*, Dv^*) = 0$  und sind fertig.

Sei also  $\det D = -1$ . Dann gilt  $d_H(v^*, Dv^*) = 1$ , also  $\min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, Dv) \leq 1$ . Wir zeigen noch, dass  $D$  keinen Fixpunkt in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \supseteq V(Q_n)$  besitzt, was äquivalent dazu ist, dass die Matrix  $D - I_n$  invertierbar ist. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Koeffizienten einer Linearkombination der Zeilen von  $D - I_n$ , die den Nullvektor ergibt. Dann ist  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine Lösung des folgenden Gleichungssystems (mit  $\lambda_0 := \lambda_n$  und  $q_0 := q_n$ ):

$$-\lambda_k + q_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dies liefert  $\lambda_1 = q_n \cdot \lambda_n = q_n \cdot q_{n-1} \cdot \lambda_{n-1} = \dots = \prod_{k=1}^n q_k \cdot \lambda_1 = -\lambda_1$ , also  $\lambda_1 = 0$ . Einsetzen dieser Lösung in das Gleichungssystem liefert sukzessive  $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Es folgt  $\min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, Dv) \geq 1$ , also Gleichheit. ■

**Folgerung 54:** Seien  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine VPM und  $n^-$  die Anzahl der Zyklen von  $L$  mit negativer Determinante. Dann gilt  $\min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, Lv) = n^-$ . Insbesondere besitzt  $L$  genau dann einen Fixpunkt, wenn  $n^- = 0$  gilt.

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $L = D$ . Wegen

$$\min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, Dv) = \sum_{k=1}^m \min_{v_k \in V(Q_{n_k})} d_H(v_k, D_k v_k)$$

und Proposition 53 folgt die Behauptung. ■

Im Folgenden untersuchen wir Potenzen von verallgemeinerten Permutationsmatrizen. Wir werden auf eine Art Addition modulo  $n$  zurückgreifen, die jedoch kein Ergebnis in  $\{0, \dots, n-1\}$ , sondern in  $\{1, \dots, n\}$  zurückliefert. Für eine gegebene natürliche Zahl  $n$  und ganze Zahlen  $a$  und  $b$  definieren wir  $a \oplus b := c$ , wobei  $c$  die eindeutig bestimmte Zahl aus  $\{1, \dots, n\}$  mit  $a + b \equiv c \pmod{n}$  ist.

**Proposition 55:** Seien  $D \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  mit  $n \geq 2$  eine einfache VPM,  $q_1, \dots, q_i$  die Nichtnulleinträge der Zeilen  $1, \dots, n$  von  $D$ ,  $s, t \in \{1, \dots, n\}$  zwei Indizes und  $k$  eine natürliche Zahl. Dann gilt

$$(D^k)_{s,t} = \delta_{t,s \oplus k} \cdot \prod_{l=s}^{s+k-1} q_{l \oplus 0}$$

für den Eintrag in Zeile  $s$  und Spalte  $t$  von  $D^k$ . Dabei ist  $\delta_{i,j}$  mit  $\delta_{i,j} = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_{i,j} = 0$  sonst das sogenannte Kronecker-Symbol.

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

**Beweis:** Wir zeigen die Aussage induktiv. Der Induktionsanfang  $k = 1$  ist korrekt.

Es gilt  $D_{s,t} = \delta_{t,s \oplus 1} \cdot q_s$ . Für  $k \geq 2$  gilt

$$(D^k)_{s,t} = \sum_{r=1}^n (D^{k-1})_{s,r} \cdot D_{r,t} = \sum_{r=1}^n \delta_{r,s \oplus (k-1)} \cdot \prod_{l=s}^{s+k-2} q_{l \oplus 0} \cdot \delta_{t,r \oplus 1} \cdot q_r.$$

Die Summanden sind 0, es sei denn es gilt  $r = s \oplus (k-1)$  und  $t = r \oplus 1$ , also  $r = s \oplus (k-1)$  und  $t = s \oplus k$ . Wir erhalten

$$(D^k)_{s,t} = \delta_{t,s \oplus k} \cdot \prod_{l=s}^{s+k-2} q_{l \oplus 0} \cdot q_{s \oplus (k-1)} = \delta_{t,s \oplus k} \cdot \prod_{l=s}^{s+k-1} q_{l \oplus 0}. \quad \blacksquare$$

**Folgerung 56:** Seien  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine VPM mit genau einem Zyklus und  $k$  eine natürliche Zahl. Dann enthält  $L^k$  genau  $\text{ggT}(n, k)$  Zyklen. Diese besitzen alle Länge  $\frac{n}{\text{ggT}(n, k)}$ , und ihre Determinante ist  $(\det L)^{\frac{k}{\text{ggT}(n, k)}}$ .

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $L = D$ . Für  $n = 1$  ist die Aussage klar. Seien also  $n \geq 2$  und  $q_1, \dots, q_n$  die Nichtnulleinträge der Zeilen  $1, \dots, n$  von  $D$ . Sei weiter  $s \in \{1, \dots, \text{ggT}(n, k)\}$  beliebig. Nach Proposition 55 bilden die Zeilen  $s \oplus k, s \oplus k, s \oplus 2k, \dots$  einen Zyklus. Dieser besitzt Länge  $\min\{l \geq 1 : s = s \oplus l \cdot k\} = \frac{n}{\text{ggT}(n, k)}$ . Offenbar liegen die Zeilen  $s_1 \neq s_2 \in \{1, \dots, \text{ggT}(n, k)\}$  nicht in einem Zyklus. Wegen  $n = \frac{n}{\text{ggT}(n, k)} \cdot \text{ggT}(n, k)$  gibt es keine weiteren Zyklen als diese. Das Produkt über die Elemente des zu Zeile  $s$  gehörenden Zyklus ist nach Proposition 55 gleich

$$\begin{aligned} \prod_{r=0}^{\frac{n}{\text{ggT}(n, k)} - 1} \prod_{l=s \oplus r \cdot k}^{(s \oplus r \cdot k) + k - 1} q_{l \oplus 0} &= \prod_{r=0}^{\frac{n}{\text{ggT}(n, k)} - 1} \prod_{l=s \oplus r \cdot \text{ggT}(n, k)}^{(s \oplus r \cdot \text{ggT}(n, k)) + k - 1} q_{l \oplus 0} \\ &= \prod_{i=1}^n q_i^{\frac{k}{\text{ggT}(n, k)}} = \left( \prod_{i=1}^n q_i \right)^{\frac{k}{\text{ggT}(n, k)}} = (\det D)^{\frac{k}{\text{ggT}(n, k)}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung 56 besagt unter anderem, dass die  $2n$ -te Potenz jeder einfachen verallgemeinerten Permutationsmatrix  $D$  die Einheitsmatrix  $I_n$  ist. Dies gilt wegen  $L^{2n} = P^T D^{2n} P = P^T I_n P = P^T P = I_n$  allgemein für jede VPM  $L$ . Daher können wir den sogenannten *Logarithmus* von  $L$  zur Basis  $I_n$  definieren:  $\log_{I_n} L := \min\{k \geq 1 : L^k = I_n\}$ .

Wir sind nun in der Lage, die Größe der kleinsten Äquivalenzklasse bezüglich eines Automorphismus  $L$  mit genau einem Zyklus zu bestimmen.

**Lemma 57:** Seien  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine VPM mit genau einem Zyklus und  $\alpha^*$  die Vielfachheit von 2 in  $n$ , also  $\alpha^* := \max\{\alpha \geq 0 : 2^\alpha \text{ teilt } n\}$ . Dann gilt

$$m := \min_{v \in V(Q_n)} |[v]_L| = \begin{cases} 1 & : \det L = 1, \\ 2^{\alpha^* + 1} & : \det L = -1. \end{cases}$$

**Beweis:** Es gilt  $|[v]_L| = \min\{k \in \mathbb{N} : L^k v = v\}$ . Wegen Proposition 53 gilt  $m = 1$  für  $\det L = 1$ . Sei also  $\det L = -1$ . Es gilt  $\min\{k \in \mathbb{N} : \frac{k}{\text{ggT}(n,k)} \text{ ist gerade}\} = 2^{\alpha^*+1}$ . Nach Folgerung 56 ist dies die kleinste Zahl  $k$ , für die  $L^k$  nur Zyklen mit positiver Determinante enthält, was nach Folgerung 54 äquivalent dazu ist, dass  $L^k$  einen Fixpunkt  $v$  besitzt, also  $|[v]_L| = k$  gilt. ■

**Lemma 58:** Sei  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine VPM mit genau einem Zyklus. Dann gilt

$$m := \text{kgV}(\{|[v]_L| : v \in V(Q_n)\}) = \log_{I_n} L = \begin{cases} n & : \det L = 1, \\ 2n & : \det L = -1. \end{cases}$$

**Beweis:** Sei  $k$  eine natürliche Zahl. Dann ist  $k$  genau dann ein Vielfaches aller Mächtigkeiten  $|[v]_L|$ ,  $v \in V(Q_n)$ , wenn  $L^k v = v$  für alle Knoten  $v$  gilt. Wegen  $\text{span}(V(Q_n)) = \mathbb{R}^n$  ist das äquivalent zu  $L^k = I_n$ , das heißt  $L^k$  besteht aus  $n$  Zyklen und alle besitzen Determinante 1. Wegen Folgerung 56 ist das äquivalent zu  $\text{ggT}(n, k) = n$  sowie  $(\det L)^{\frac{k}{\text{ggT}(n,k)}} = 1$ , das heißt  $k$  ist ein Vielfaches von  $n$ , und im Fall  $\det L = -1$  muss  $\frac{k}{n} = \frac{k}{\text{ggT}(n,k)}$  zusätzlich noch gerade sein. Bestimmt man das Minimum von  $k$  mit je einer dieser Eigenschaften, so folgt die Behauptung. ■

Bisher haben wir die Fixpunktfreiheit als notwendige Bedingung für 1-lokale Automorphismen verwendet. Wir erweitern diese Bedingung nun auf Potenzen von  $L$ .

**Proposition 59:** Sei  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $Q_n$ . Dann besitzt  $L^k$  für keinen Index  $k \in \{1, \dots, \log_{I_n} L - 1\}$  einen Fixpunkt in  $V(Q_n)$ .

**Beweis:** Der Knoten  $v$  ist genau dann ein Fixpunkt von  $L^k$ , wenn  $|[v]_L|$  ein Teiler von  $k$  ist. Wegen Satz 46 ist  $L^k$  entweder fixpunktfrei oder besitzt alle Knoten  $v$  als Fixpunkt. Der zweite Fall ist wegen  $\text{span}(V(Q_n)) = \mathbb{R}^n$  äquivalent zu  $L^k = I_n$ . ■

**Folgerung 60:** Seien  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $Q_n$  sowie  $l^+$  und  $l^-$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$  mit positiver beziehungsweise negativer Determinante. Dann sind alle Zykluslängen Zweierpotenzen und es gilt  $k^* := \log_{I_n} L = \max\{l^+, 2l^-\}$ .

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $L = D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$ . Per Definition von  $k^*$  gilt  $D^{k^*} = \text{diag}(D_1^{k^*}, \dots, D_m^{k^*}) = I_n$ . Wegen Proposition 59 gilt  $|[v]_D| = k^*$  für alle Knoten  $v$  von  $Q_n$ , und wegen Satz 46 ist  $k^*$  ein Teiler von  $|V(Q_n)| = 2^n$ .

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Sei  $i \in \{1, \dots, m\}$  ein beliebiger Index. Wegen  $D_i^{k^*} = I_{n_i}$  und Lemma 58 ist  $k^*$  ein Vielfaches von  $n_i$ . Daher ist  $n_i$  auch eine Zweierpotenz. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 k^* &= \text{kgV}(\{\log_{I_{n_i}} D_i : i = 1, \dots, m\}) \\
 &= \text{kgV}(\{n_i : \det D_i = 1\} \cup \{2n_i : \det D_i = -1\}) && \text{(Lemma 58)} \\
 &= \max(\{n_i : \det D_i = 1\} \cup \{2n_i : \det D_i = -1\}) && (n_i \text{ Zweierpotenz}) \\
 &= \max\{l^+, 2l^-\}. && \blacksquare
 \end{aligned}$$

Wir können nun zeigen, dass ein nichttrivialer 1-lokaler Automorphismus eines Würfelgraphen einen „großen“ Zyklus mit negativer Determinante besitzt.

**Lemma 61:** *Seien  $L$  ein nichttrivialer 1-lokaler Automorphismus von  $Q_n$ ,  $l$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$  und  $l^-$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$  mit negativer Determinante. Dann gilt  $l \in \{l^-, 2l^-\}$ .*

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $L = D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$ . Da  $D$  nichttrivial ist, besitzt  $D$  keinen Fixpunkt in  $V(Q_n)$ . Wegen Folgerung 54 ist  $\det D_i = -1$  für mindestens einen Index  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Die Zahl  $l^-$  ist damit wohldefiniert.

Wir führen die Annahme, dass die Aussage nicht korrekt ist, zum Widerspruch. Da die Zyklenlängen nach Folgerung 60 Zweierpotenzen sind, gilt dann  $l^- < \frac{l}{2}$ . Sei  $i \in \{1, \dots, m\}$  ein beliebiger Index. Gilt  $\det D_i = 1$ , dann besitzt  $D_i$  nach Proposition 53 einen Fixpunkt  $v_i^* \in V(Q_{n_i})$ . Dieser ist auch Fixpunkt von  $D_i^{2l^-}$ . Gilt  $\det D_i = -1$ , dann besitzt  $D_i^{2n_i}$  wegen Lemma 57 einen Fixpunkt  $v_i^* \in V(Q_{n_i})$ . Dieser ist wegen  $n_i \leq l^-$  auch ein Fixpunkt von  $D_i^{2l^-}$ . Damit ist der Knoten  $v^* := (v_1^*, \dots, v_m^*)$  ein Fixpunkt von  $D^{2l^-}$ . Wegen Folgerung 60 gilt

$$\log_{I_n} D = \max\{l^+, 2l^-\} = \max\{l, 2l^-\} = l > 2l^-,$$

was Proposition 59 widerspricht. ■

Da wir uns für 2-lokale Automorphismen interessieren, können wir uns auf folgende Matrizen beschränken.

**Definition 62 (2-VPM):** *Seien  $L$  eine VPM mit mindestens einem Zyklus mit negativer Determinante,  $l$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$  und  $l^-$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$  mit negativer Determinante. Sind die Zyklenlängen von  $L$  Zweierpotenzen und gilt  $l \in \{l^-, 2l^-\}$ , so bezeichnen wir  $L$  kurz als 2-VPM.*

Für solche Matrizen definieren wir die sogenannte *Charakteristik*. Wie wir zeigen werden, ist diese ausschlaggebend dafür, ob eine 2-VPM ein  $k$ -lokaler Automorphismus ist oder nicht.

**Definition 63 (Charakteristik):** Seien  $L$  eine 2-VPM und  $2^{\alpha_1} \leq \dots \leq 2^{\alpha_s}$  die Längen der Zyklen von  $L$  mit negativer Determinante. Dann ist die Charakteristik von  $L$  definiert als  $\delta(L) := \min_{\alpha \in \{0, \dots, \alpha_s\}} 2^\alpha \cdot N_\alpha$  mit  $N_\alpha := |\{i \in \{1, \dots, s\} : \alpha_i \geq \alpha\}|$ .

**Lemma 64:** Seien  $L$  eine 2-VPM und  $2^{\alpha_1} \leq \dots \leq 2^{\alpha_s}$  die Längen der Zyklen von  $L$  mit negativer Determinante. Dann gilt  $\delta(L) \leq s$ . Gilt  $N_\alpha \leq 2N_{\alpha+1}$  für alle  $\alpha \in \{0, \dots, \alpha_s - 1\}$ , dann gilt sogar Gleichheit.

**Beweis:** Es gilt  $\delta(L) \leq 2^0 \cdot N_0 = s$ . Gilt  $N_\alpha \leq 2N_{\alpha+1}$  für alle  $\alpha \in \{0, \dots, \alpha_s - 1\}$ , so folgt  $2^\alpha \cdot N_\alpha \leq 2^{\alpha+1} \cdot N_{\alpha+1}$ . Das Minimum wird dann in  $\alpha = 0$  angenommen und es folgt die Behauptung. ■

Folgendes Lemma zeigt, warum die Charakteristik beschreibt, wann eine 2-VPM ein  $k$ -lokaler Automorphismus ist.

**Lemma 65:** Seien  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine 2-VPM und  $2^{\alpha_1} \leq \dots \leq 2^{\alpha_s}$  die Längen der Zyklen  $D_i$  von  $L$  mit negativer Determinante. Setzen wir  $l^- := 2^{\alpha_s}$ , so gilt

$$\min_{v \in V(Q_n)} \min_{k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}} d_H(v, L^k v) = \delta(L).$$

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $L = D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$ . Nach Folgerung 54 ist  $\min_{v \in V(Q_n)} d_H(v, D^k v)$  für jede Zahl  $k$  gleich der Anzahl der Zyklen von  $D^k$  mit negativer Determinante. Diese können nur durch die Zyklen  $D_i$  erzeugt werden. Sei  $k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}$  eine beliebige Zahl. Nach Folgerung 56 besitzt  $D_i^k$  genau  $\text{ggT}(2^{\alpha_i}, k)$  Zyklen mit Determinante gleich  $(\det D_i)^{\frac{k}{\text{ggT}(2^{\alpha_i}, k)}}$ . Diese ist genau dann negativ, wenn  $\frac{k}{\text{ggT}(2^{\alpha_i}, k)}$  ungerade ist. Somit folgt

$$\min_{v \in V(Q_n)} \min_{k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}} d_H(v, D^k v) = \min_{k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, s\}: \\ \frac{k}{\text{ggT}(2^{\alpha_i}, k)} \text{ ungerade}}} \text{ggT}(2^{\alpha_i}, k).$$

Sei  $k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}$  beliebig. Wir können  $k$  eindeutig darstellen als  $k = 2^\alpha \cdot m$  mit  $\alpha \in \{0, \dots, \alpha_s\}$  und  $m$  ungerade. Nun gilt  $\text{ggT}(2^{\alpha_i}, k) = \text{ggT}(2^{\alpha_i}, 2^\alpha)$ . Außerdem ist  $\frac{k}{\text{ggT}(2^{\alpha_i}, k)}$  genau dann ungerade, wenn  $\frac{2^\alpha}{\text{ggT}(2^{\alpha_i}, 2^\alpha)}$  ungerade ist. Daher genügt es, das

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Minimum nur über alle  $k \in \{2^0, 2^1, \dots, 2^{\alpha_s}\}$  zu bestimmen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \min_{v \in V(Q_n)} \min_{k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}} d_H(v, D^k v) &= \min_{\alpha \in \{0, \dots, \alpha_s\}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, s\}: \\ \frac{2^\alpha}{\text{ggT}(2^{\alpha_i}, 2^\alpha)} \text{ ungerade}}} \text{ggT}(2^{\alpha_i}, 2^\alpha) \\ &= \min_{\alpha \in \{0, \dots, \alpha_s\}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, s\}: \\ \alpha_i \geq \alpha}} 2^\alpha = \delta(D). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nun können wir die  $k$ -lokalen Automorphismen von Würfelgraphen für  $k \geq 1$  charakterisieren.

**Satz 66:** *Seien  $L: V(Q_n) \rightarrow V(Q_n)$  eine Abbildung und  $k$  eine natürliche Zahl. Dann sind äquivalent:*

- (i)  $L$  ist ein nichttrivialer  $k$ -lokaler Automorphismus von  $Q_n$ .
- (ii)  $L$  ist eine 2-VPM mit  $\delta(L) \geq 2k + 2$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Richtung von (i) nach (ii). Nach Satz 51 ist  $L$  eine VPM. Seien  $l$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$  sowie  $l^+$  und  $l^-$  die Längen eines größten Zyklus von  $L$  mit positiver beziehungsweise negativer Determinante. Wegen Folgerung 60 sind alle Zyklenlängen Zweierpotenzen und wegen Lemma 61 gilt  $l \in \{l^-, 2l^-\}$  und insbesondere  $l^+ \leq 2l^-$ . Sei  $v$  ein beliebiger Knoten von  $Q_n$ . Nach Proposition 59 gilt  $|[v]_L| = \log_{I_n} L =: k^*$ . Wegen Folgerung 60 gilt  $k^* = \max\{l^+, 2l^-\} = 2l^-$ . Da  $L$   $k$ -lokal ist, folgt mit Lemma 65 die Ungleichung

$$\delta(L) = \min_{v \in V(Q_n)} \min_{k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}} d_H(v, L^k v) = \min_{v \in V(Q_n)} \min_{w \in [v]_L \setminus \{v\}} d_H(v, w) \geq 2k + 2.$$

Wir zeigen noch die Richtung von (ii) nach (i). Nach Satz 51 ist  $L$  ein Automorphismus von  $Q_n$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $L$   $k$ -lokal ist. Ohne Einschränkung sei  $L = D = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$  und  $D_1, \dots, D_s$  seien die Zyklen von  $L$  mit negativer Determinante und den Längen  $2^{\alpha_1} \leq \dots \leq 2^{\alpha_s}$ . Des Weiteren seien  $l$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$ ,  $l^-$  die Länge eines größten Zyklus von  $L$  mit negativer Determinante,  $v$  ein beliebiger Knoten von  $Q_n$  und  $k := |[v]_L|$  die kleinste natürliche Zahl, für die  $v = (v_1, \dots, v_m)$  ein Fixpunkt von  $D^k$  ist. Dann ist  $v_s$  ein Fixpunkt von  $D_s$ . Mit Lemma 57 folgt  $k \geq 2^{\alpha_s + 1} = 2l^-$ . Da die Zyklenlängen von  $L$  Zweierpotenzen sind und  $l \in \{l^-, 2l^-\}$  gilt, folgt  $D^{2l^-} = I_n$  mit Lemma 58 und damit  $k = 2l^-$ . Sei  $w \in [v]_L \setminus \{v\}$  ein beliebiger Knoten. Dann gilt wegen Lemma 65

$$d_H(v, w) \geq \min_{k \in \{1, \dots, 2l^- - 1\}} d_H(v, D^k v) \geq \delta(D) = \delta(L) \geq 2k + 2. \quad \blacksquare$$

Wir wollen wissen, ob man mit Hilfe von 2-lokalen Automorphismen aus einem Würfelgraphen einen 3-chromatischen Faktorgraphen konstruieren kann. Bei der Untersuchung solcher Automorphismen kann man diejenigen vernachlässigen, die 2-chromatische Faktorgraphen erzeugen.

**Satz 67:** Sei  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine 2-VPM mit  $\delta(L) \geq 4$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $Q_n|_L$  ist 2-färbbar.

(ii)  $L$  besteht aus einer geraden Anzahl an Zyklen mit negativer Determinante.

**Beweis:** Wir setzen  $v := (1, \dots, 1) \in V(Q_n)$ . Die Anzahl von  $-1$ en in  $Lv$  ist gleich der Anzahl von  $-1$ en in  $L$ . Zyklen von  $L$  mit positiver Determinante enthalten eine gerade Anzahl an  $-1$ en, Zyklen mit negativer Determinante eine ungerade Anzahl. Der Abstand  $d_{Q_n}(v, Lv)$  ist daher genau dann gerade, wenn  $L$  eine gerade Anzahl an Zyklen mit negativer Determinante enthält. Die Äquivalenz (i)  $\iff$  (ii) folgt mit Folgerung 45, Richtung (i)  $\implies$  (iii) beziehungsweise Richtung (ii)  $\implies$  (i). ■

Leider konnte im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht herausgefunden werden, ob es Faktorgraphen von Würfelgraphen gibt, die Gegenbeispiele zu Payans Vermutung sind. Daher wurde nach weiteren Ideen gesucht, aus  $(0, 2)$ -Graphen weitere  $(0, 2)$ -Graphen zu konstruieren.

## 4.4 Kantenadditionen in $(0, 2)$ -Graphen

In Abschnitt 4.2 haben wir uns mit dem Kartesischen Produkt von Graphen beschäftigt. Sind zum Beispiel  $G_1$  und  $G_2$  Kopien eines  $(0, 2)$ -Graphen  $G$  und verbindet man jeden Knoten von  $G_1$  mit seiner entsprechenden Kopie in  $G_2$ , so ist das Ergebnis wieder ein  $(0, 2)$ -Graph. Automorphismen, die wir in Abschnitt 4.3 studiert haben, ordnen einem Knoten seine „Kopie“ innerhalb desselben Graphen zu.

Das Verbinden von Knoten mit der ihnen durch einen Automorphismus zugeordneten „Kopie“ ist eine Konstruktionsvorschrift, über die es sich nachzudenken lohnt.

Im Folgenden untersuchen wir, welche Eigenschaften eines Automorphismus hinreichend dafür sind, dass das Resultat einer solchen Konstruktion ein  $(0, 2)$ -Graph ist, sofern der Ausgangsgraph ein  $(0, 2)$ -Graph war.

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

**Definition 68:** Seien  $G$  ein Graph und  $\Phi: V(G) \rightarrow V(G)$  eine Bijektion ohne Fixpunkt, das heißt  $\Phi(v) \neq v$  für alle Knoten  $v$ . Dann ist der Graph  $G + \Phi$  definiert durch  $V(G + \Phi) := V(G)$  und  $E(G + \Phi) := E \cup \{\{v, \Phi(v)\} : v \in V(G)\}$ .

Der folgende Satz zeigt, dass spezielle 1-lokale Automorphismen die gewünschte Eigenschaft besitzen. Wir werden dabei ausnutzen, dass aus  $\{u, v\} \in E(G + \Phi)$  und  $\{u, v\} \notin E(G)$  stets  $u = \Phi(v)$  oder  $u = \Phi^{-1}(v)$ , also insbesondere  $[u] = [v]$  folgt.

**Satz 69:** Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph und  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $G$  mit  $|[v]_\Phi| = 2$  für alle Knoten  $v$  oder  $|[v]_\Phi| = 4$  für alle Knoten  $v$ . Dann ist  $G + \Phi$  auch ein  $(0, 2)$ -Graph.

**Beweis:** Wir definieren einen Graphen  $G_\emptyset$  durch  $V(G_\emptyset) := V(G)$  und  $E(G_\emptyset) := \{\{v, \Phi(v)\} : v \in V(G_\emptyset)\}$  und stellen fest, dass  $G_\emptyset$  aufgrund der Eigenschaften von  $\Phi$  entweder aus disjunkten Kopien des Würfelgraphen  $Q_1$  oder aus disjunkten Kopien von  $C_4$ , einem Kreis der Länge 4, besteht. In  $G_\emptyset$  besitzen zwei verschiedene Knoten daher genau 0 oder 2 gemeinsame Nachbarn. Für den Maximalgrad von  $G_\emptyset$  gilt  $\Delta(G_\emptyset) \leq 2$  und wegen der 1-Lokalität von  $\Phi$  gilt  $E(G_\emptyset) \cap E(G) = \emptyset$ .

Seien  $u$  und  $v$  zwei verschiedene Knoten von  $G + \Phi$  mit mindestens einem gemeinsamen Nachbarn. Wir unterscheiden zwei Fälle. Zunächst betrachten wir den Fall, dass  $u$  und  $v$  bereits in  $G$  zwei gemeinsame Nachbarn besitzen. Wir führen die Annahme, dass durch die Kantenadditionen ein weiterer gemeinsamer Nachbar  $w$  hinzukommt, zu einem Widerspruch. In diesem Fall ist  $w$  ohne Einschränkung kein Nachbar von  $u$  in  $G$  und es folgt  $[u] = [w]$ . Ist  $w$  ein Nachbar von  $v$  in  $G$ , so folgt  $d_G(u, w) \leq d_G(u, v) + d_G(v, w) \leq 3 < 4$ , was der 1-Lokalität von  $\Phi$  widerspricht. Ist  $w$  kein Nachbar von  $v$  in  $G$ , so folgt  $[w] = [v]$ , was wegen  $d_G(u, v) \leq 2 < 4$  und  $[u] = [w] = [v]$  ebenfalls ein Widerspruch ist.

Wir betrachten noch den Fall, dass  $u$  und  $v$  keine gemeinsamen Nachbarn in  $G$  besitzen. Besitzen  $u$  und  $v$  in  $G + \Phi$  nur gemeinsame Nachbarn, die in  $G$  weder Nachbarn von  $u$  noch von  $v$  sind, dann sind das gerade die Nachbarn von  $u$  und  $v$  in  $G_\emptyset$ . Davon gibt es genau 2. Sei also  $w$  ein gemeinsamer Nachbar von  $u$  und  $v$  in  $G + \Phi$ , der ohne Einschränkung ein Nachbar von  $u$  in  $G$  ist. Weiterhin gilt  $v = \Phi^i(w)$  für einen Index  $i \in \{-1, 1\}$ . Da  $\Phi^i$  ein Automorphismus ist, ist  $w' := \Phi^i(u)$  ein Nachbar von  $v$  in  $G$  und damit ein gemeinsamer Nachbar von  $u$  und  $v$  in  $G + \Phi = G + \Phi^i$ .

Wegen  $[u] = [w']$ ,  $d_G(u, w) = 1 < 4$  und da  $\Phi^i$  1-lokal ist, folgt  $[u] \neq [w]$  und damit  $w' \neq w$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $u$  und  $v$  neben  $w$  und  $w'$  keine weiteren gemeinsamen Nachbarn in  $G + \Phi$  besitzen. Dazu führen wir die Gegenannahme zu einem Widerspruch.

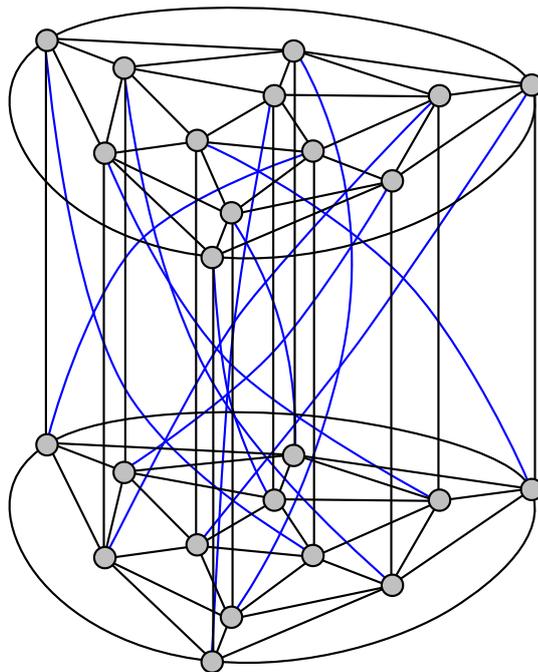
Sei  $\tilde{w}$  ein weiterer gemeinsamer Nachbar von  $u$  und  $v$  in  $G + \Phi$ . Ist  $\tilde{w}$  in  $G$  weder Nachbar von  $u$  noch von  $v$ , dann ist  $\tilde{w}$  gemeinsamer Nachbar von  $u$  und  $v$  in  $G_\emptyset$ . Daher existiert ein weiterer gemeinsamer Nachbar  $\tilde{w}'$  in  $G_\emptyset$ . Dieser ist ebenfalls weder  $w$  noch  $w'$ . Daher besitzt  $v$  in  $G_\emptyset$  die Knoten  $w$ ,  $\tilde{w}$  und  $\tilde{w}'$  als Nachbarn, was wegen  $\Delta(G_\emptyset) \leq 2$  ein Widerspruch ist.

Sei also  $\tilde{w}$  ohne Einschränkung ein Nachbar von  $u$  in  $G$ . Da  $\tilde{w}$  kein Nachbar von  $v$  sein kann, gilt dann  $[\tilde{w}] = [v] = [w]$ , was wegen  $d_G(\tilde{w}, w) \leq d_G(\tilde{w}, u) + d_G(u, w) \leq 2 < 4$  ein Widerspruch zur 1-Lokalität von  $\Phi$  ist.

Daher besitzen  $u$  und  $v$  in  $G + \Phi$  nur  $w$  und  $w'$  als gemeinsame Nachbarn. ■

**Beispiel 70:**

Seien  $I$  der Ikosaedergraph,  $K_2$  der vollständige Graph mit 2 Knoten,  $G := I \times K_2$  und  $\Phi: V(G) \rightarrow V(G)$  die eindeutig bestimmte Abbildung mit  $d_G(v, \Phi(v)) = 4$  für alle Knoten  $v$  von  $G$ . Folgende Abbildung zeigt den Graphen  $G + \Phi$ .



#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Die blauen Kanten sind die Kanten, die durch die Kantenaddition zu  $G$  hinzugefügt werden.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus mit  $|\llbracket v \rrbracket_\Phi| = 2$  für alle Knoten  $v$  von  $G$  ist. Wegen Satz 30 ist  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph, und nach Satz 69 ist auch  $G + \Phi$  ein  $(0, 2)$ -Graph.

Die Aussage von Satz 69 über 1-lokale Automorphismen  $\Phi$  mit  $|\llbracket v \rrbracket_\Phi| = 2$  für alle  $v$  wurde bereits in [BÖ09], Abschnitt 5.1 festgehalten. Die durchgeführte Recherche lässt vermuten, dass die Aussage von Satz 69 für 1-lokale Automorphismen  $\Phi$  mit  $|\llbracket v \rrbracket_\Phi| = 4$  für alle  $v$  noch nicht bekannt ist.

Offenbar gilt  $\chi(G + \Phi) \geq \chi(G)$ . Um ein erstes Gegenbeispiel zu Payans Vermutung mit solchen Kantenadditionen zu konstruieren, müssen wir daher von einem 2-chromatischen  $(0, 2)$ -Graphen ausgehen. Dies ist in zweierlei Hinsicht positiv. Zum einen sind Würfelgraphen 2-chromatische  $(0, 2)$ -Graphen. Zum anderen haben wir die Automorphismen von Würfelgraphen bereits in Abschnitt 4.3.2 intensiv studiert. Auf der Suche nach einem 3-chromatischen  $(0, 2)$ -Graphen wollen wir den Fall, dass  $G + \Phi$  2-chromatisch ist, gleich ausschließen. Folgender Satz hilft uns, ihn zu erkennen.

**Satz 71:** *Seien  $G$  ein Graph und  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $G$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $G + \Phi$  ist 2-färbbar.
- (ii)  $G$  ist 2-färbbar und es existiert ein  $v \in V(G)$ , sodass  $d_G(v, \Phi(v))$  ungerade ist.
- (iii)  $G$  ist 2-färbbar und für alle  $v \in V(G)$  ist  $d_G(v, \Phi(v))$  ungerade.

**Beweis:** Seien  $G + \Phi$  2-färbbar und  $v$  ein ausgezeichneter Knoten von  $G$ . Dann gibt es bis auf Umbenennung der Farben genau eine 2-Färbung  $\chi$  von  $G + \Phi$ . Diese ist auch eine 2-Färbung von  $G$  und ordnet genau den Knoten dieselbe Farbe wie  $v$  zu, die einen geraden Abstand von  $v$  besitzen. Wegen  $\{v, \Phi(v)\} \in E(G + \Phi)$  folgt  $\chi(v) \neq \chi(\Phi(v))$ . Daher ist  $d_G(v, \Phi(v))$  ungerade.

Die Äquivalenz (ii)  $\iff$  (iii) folgt mit Folgerung 45.

Sei  $G$  2-färbbar und für alle  $v \in V(G)$  sei  $d_G(v, \Phi(v))$  ungerade. Dann besitzt  $G$  eine bis auf Umbenennung der Farben eindeutige 2-Färbung  $\chi$ , die wegen  $d_G(v, \Phi(v))$  ungerade einem Knoten  $v$  und seinem Bild  $\Phi(v)$  unterschiedliche Farben zuweist.

Da die Kanten von  $G + \Phi$  Kanten von  $G$  oder Kanten der Form  $\{v, \Phi(v)\}$  sind, ist  $\chi$  auch eine 2-Färbung von  $G + \Phi$ . ■

**Satz 72:** Sei  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine 2-VPM mit  $\delta(L) \geq 4$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $Q_n + L$  ist 2-färbbar.

(ii)  $L$  besteht aus einer ungeraden Anzahl an Zyklen mit negativer Determinante.

**Beweis:** Wir setzen  $v := (1, \dots, 1) \in V(Q_n)$ . Die Anzahl von  $-1$ en in  $Lv$  ist gleich der Anzahl von  $-1$ en in  $L$ . Zyklen von  $L$  mit positiver Determinante enthalten eine gerade Anzahl an  $-1$ en, Zyklen mit negativer Determinante eine ungerade Anzahl. Der Abstand  $d_{Q_n}(v, Lv)$  ist daher genau dann ungerade, wenn  $L$  eine ungerade Anzahl an Zyklen mit negativer Determinante enthält. Die Äquivalenz (i)  $\iff$  (ii) folgt mit Satz 71, Richtung (i)  $\implies$  (iii) beziehungsweise Richtung (ii)  $\implies$  (i). ■

Im Folgenden stellen wir eine obere Schranke für die chromatische Zahl von  $G + \Phi$  vor, die von der chromatischen Zahl von  $G$  und der Parität der Zyklenlänge von  $\Phi$  abhängig ist.

**Satz 73:** Seien  $G$  ein Graph mit einem ausgezeichneten Knoten  $v^*$ ,  $\Phi$  ein 1-lokaler Automorphismus von  $G$  und  $m := |[v^*]_\Phi|$ . Dann gilt  $\chi(G + \Phi) \leq \chi(G) \cdot \chi(C_m)$ . Dabei ist  $C_m$  für  $m \geq 3$  ein Kreis der Länge  $m$  und für  $m = 2$  gleich der Würfelgraph  $Q_1$ .

**Beweis:** Wegen Satz 46 gilt  $m = |[v]|$  für alle Knoten  $v$ . Seien  $V(C_m) = \{1, \dots, m\}$ ,  $\chi': V(C_m) \rightarrow \{1, \dots, \chi(C_m)\}$  eine  $\chi(C_m)$ -Färbung von  $C_m$ ,  $w: V(G) \rightarrow V(G)$  eine Abbildung mit  $[w(u)] = [u]$  und  $w(u') = w(u)$  für alle Knoten  $u$  und alle Knoten  $u'$  mit  $[u'] = [u]$ ,  $n: V(G) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  eine Abbildung mit  $\Phi^{n(u)}(u) = w(u)$  für alle Knoten  $u$  sowie  $\chi: V(G) \rightarrow \{1 \cdot \chi(C_m), 2 \cdot \chi(C_m), \dots, \chi(G) \cdot \chi(C_m)\}$  eine  $\chi(G)$ -Färbung von  $G$ . Wir definieren eine Abbildung

$$\chi'': V(G + \Phi) \rightarrow \{\chi(C_m) + 1, \chi(C_m) + 2, \dots, \chi(C_m) + \chi(G) \cdot \chi(C_m)\}$$

durch  $\chi''(u) := \chi(u) + \chi'(n(u))$  und zeigen, dass  $\chi''$  eine  $\chi(G) \cdot \chi(C_m)$ -Färbung von  $G + \Phi$  ist. Sei  $\{u, v\}$  eine Kante von  $E(G + \Phi)$ . Ist  $\{u, v\}$  auch eine Kante von  $G$ , dann gilt  $\chi(u) \neq \chi(v)$  und damit  $\chi''(u) \neq \chi''(v)$ . Ansonsten gilt ohne Einschränkung  $u = \Phi(v)$  und es folgt  $n(u) = n(v) \oplus 1$  mit der Operation  $\oplus$  aus Abschnitt 4.3.2. Daher gilt  $\chi'(n(u)) \neq \chi'(n(v))$  und somit  $\chi''(u) \neq \chi''(v)$ . ■

#### 4 Konstruktion von $(0, 2)$ -Graphen

Für unsere speziellen Graphen ist die Abschätzung relativ gut.

**Folgerung 74:** Sei  $L \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$  eine 2-VPM mit einer geraden Anzahl von Zyklen mit negativer Determinante und  $\delta(L) \geq 4$ . Dann gilt  $\chi(Q_n + L) \in \{3, 4\}$ .

**Beweis:** Wegen Satz 72 gilt  $\chi(Q_n + L) \geq 3$ , und wegen  $\chi(Q_n) = 2$ ,  $\chi(C_m) = 2$  für alle geraden Zahlen  $m$  sowie Satz 73 folgt  $\chi(Q_n + L) \leq 4$ . ■

Im Beweis von Folgerung 48 haben wir darauf verwiesen, dass die Abschätzung  $\chi(Q_n|_{\Phi_n}) \leq 4$  leicht einzusehen ist. Folgerung 74 beinhaltet diese Abschätzung als Spezialfall.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit konnte nicht geklärt werden, ob wir die 2-VPM  $L$  aus Folgerung 74 so wählen können, dass  $\chi(Q_n + L) = 3$  gilt. Payans Vermutung bleibt daher weiterhin offen.

# 5 Der Common Neighbour Graph eines Graphen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem sogenannten *Common Neighbour Graph* eines Graphen. In diesem sind Informationen über die gemeinsame Nachbarschaft je zweier Knoten gespeichert. Insbesondere interessieren uns die Common Neighbour Graphen von  $(0, \lambda)$ -Graphen.

**Definition 75 (Common Neighbour Graph):** Sei  $G$  ein Graph. Dann heißt der Graph  $G'$ , definiert durch  $V(G') := V(G)$  und  $E(G') := \{\{u, v\} : N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset\}$ , Common Neighbour Graph von  $G$ . Wir schreiben auch  $G' = \text{CNG}(G)$ .

Da wir uns für 3-chromatische  $(0, 2)$ -Graphen interessieren, suchen wir wieder nach einer Charakterisierung von 2-färbbaren Graphen, um diese bei der Suche ausschließen zu können.

**Proposition 76:** Seien  $G$  ein Graph,  $G' = \text{CNG}(G)$  sein Common Neighbour Graph,  $u \neq v$  zwei Knoten und  $(w_0, \dots, w_{2l})$  ein Weg mit  $w_0 = u$  und  $w_{2l} = v$ . Dann gibt es einen Weg von  $u$  nach  $v$  in  $G'$ .

**Beweis:** Ohne Einschränkung gilt  $w_{i-2} \neq w_i$  für alle  $i = 2, \dots, 2l$ . (Ansonsten entferne sukzessive  $w_{i-1}$  und  $w_i$  aus der Knotenfolge für Indizes  $i$ , wo dies nicht erfüllt ist. Wegen  $u \neq v$  besteht die Knotenfolge stets aus mehr als einem Knoten.) Wegen  $w_{2i-1} \in N_G(w_{2i-2}) \cap N_G(w_{2i})$  folgt  $\{w_{2i-2}, w_{2i}\} \in E(G')$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Damit ist  $(w_0, w_2, \dots, w_{2l})$  ein Weg von  $u$  nach  $v$  in  $G'$ . ■

Die 2-Färbbarkeit eines zusammenhängenden Graphen  $G$  lässt sich nun mit Hilfe des Zusammenhangs seines Common Neighbour Graphen beschreiben.

## 5 Der Common Neighbour Graph eines Graphen

**Satz 77:** Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit mindestens 2 Knoten und  $G' = \text{CNG}(G)$  sein Common Neighbour Graph. Dann gilt:

1. Ist  $G$  2-färbbar und  $(V_1, V_2)$  eine Partition von  $V(G)$  in stabile Mengen, dann sind  $G'[V_1]$  und  $G'[V_2]$  zusammenhängend,  $G'$  selbst jedoch nicht.
2. Ist  $G$  nicht 2-färbbar, dann ist  $G'$  zusammenhängend.

**Beweis:** Seien  $G$  2-färbbar und  $\chi$  eine 2-Färbung von  $G$ , ohne Einschränkung mit  $\chi(v) := i \iff v \in V_i$ . Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass  $G'$  zusammenhängend ist. Dann gibt es Knoten  $u \in V_1$  und  $v \in V_2$  mit  $\{u, v\} \in E(G')$ . Aufgrund der Definition des Common Neighbour Graphen existiert ein Knoten  $w \in N_G(u) \cap N_G(v)$ . Da  $\chi$  eine 2-Färbung von  $G$  ist, folgt  $\chi(w) \in \{1, 2\} \setminus \{\chi(u), \chi(v)\} = \emptyset$ .

Wir zeigen noch, dass die induzierten Teilgraphen  $C_1 := G'[V_1]$  und  $C_2 := G'[V_2]$  von  $G'$  zusammenhängend sind. Seien  $u \neq v \in V_1$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, gibt es in  $G$  einen Weg  $(w_0, \dots, w_{2l})$  gerader Länge mit  $w_0 = u$  und  $w_{2l} = v$ . Nach Proposition 76 gibt es daher in  $G'$  einen Weg von  $u$  nach  $v$ . Der Zusammenhang von  $C_2$  folgt analog.

Sei  $G$  nicht 2-färbbar und seien  $u \neq v$  zwei beliebige Knoten von  $G$ . Dann gibt es wegen Proposition 24 einen Weg gerader Länge von  $u$  nach  $v$  in  $G$  und wegen Proposition 76 einen Weg von  $u$  nach  $v$  in  $G'$ . Der Graph  $G'$  ist daher zusammenhängend. ■

In Korollar 8 haben wir gezeigt, dass  $(0, \lambda)$ -Graphen regulär sind. Dasselbe gilt auch für ihre Common Neighbour Graphen.

**Satz 78:** Sei  $G$  ein  $(0, \lambda)$ -Graph mit Grad  $d(G)$  und  $G' := \text{CNG}(G)$  sein Common Neighbour Graph. Dann ist  $G'$  regulär und es gilt

$$d(G') = \frac{d(G)(d(G) - 1)}{\lambda}.$$

**Beweis:** Sei  $v$  ein beliebiger Knoten von  $G'$ . Nach Lemma 5 ist  $G[N_G(v)]$  die disjunkte Vereinigung eines leeren Graphen  $G_1$  und eines  $\lambda$ -regulären Graphen  $G_2$ . Wir setzen  $V_{1,1} := V(G_1)$ ,  $V_{1,2} := V(G_2)$  und  $V_2 := \{u : d_G(u, v) = 2\}$ . Die Nachbarn von  $v$  in  $G'$  sind gerade die Knoten aus  $V_{1,2} \cup V_2$ .

Jeder Knoten  $u \in V_{1,1}$  besitzt in  $G$  genau  $d(G) - 1$  Nachbarn in  $V_2$ , jeder Knoten  $u \in V_{1,2}$  genau  $d(G) - \lambda - 1$  Nachbarn in  $V_2$ . Jeder Knoten  $w \in V_2$  besitzt in  $G$  genau

$\lambda$  gemeinsame Nachbarn mit  $v$ , also Nachbarn in  $V_{1,1} \cup V_{1,2}$ . Wir zählen die Kanten zwischen  $V_{1,1} \cup V_{1,2}$  und  $V_2$  und erhalten

$$\begin{aligned} (d(G) - 1) \cdot d(G) - \lambda \cdot |V_{1,2}| &= (d(G) - 1) \cdot |V_{1,1} \cup V_{1,2}| - \lambda \cdot |V_{1,2}| \\ &= (d(G) - 1) \cdot |V_{1,1}| + (d(G) - 1 - \lambda) \cdot |V_{1,2}| \\ &= |E(V_{1,1} \cup V_{1,2}, V_2)| = \lambda \cdot |V_2|. \end{aligned}$$

Wegen  $\lambda \geq 2$  erhalten wir

$$d_{G'}(v) = |N_{G'}(v)| = |V_{1,2} \cup V_2| = |V_{1,2}| + |V_2| = \frac{d(G) \cdot (d(G) - 1)}{\lambda}. \quad \blacksquare$$

Satz 78 liefert einen alternativen Beweis für die bereits in Satz 10 aufgeführte untere Schranke der Knotenzahl eines  $(0, \lambda)$ -Graphen in Abhängigkeit seiner Valenz.

Leider konnten in dieser Arbeit keine hinreichenden Bedingungen dafür gefunden werden, dass ein regulärer zusammenhängender Graph ein Common Neighbour Graph eines  $(0, 2)$ -Graphen ist. Diese wären jedoch wichtig, um die Existenz eines Gegenbeispiels zu Payans Vermutung zu beweisen.

## 6 3-Färbungen von $(0, 2)$ -Graphen

In diesem Kapitel untersuchen wir Eigenschaften von 3-Färbungen von  $(0, 2)$ -Graphen. Diese Analyse könnte uns sowohl helfen, Payans Vermutung zu beweisen, sofern sie korrekt ist, als auch ein Gegenbeispiel zu finden, falls sie falsch ist.

Das folgende Lemma spielt eine wichtige Rolle bei der Analyse.

**Lemma 79:** *Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph,  $u, v$  zwei benachbarte Knoten von  $G$  und  $\chi$  eine 3-Färbung von  $G$  mit  $\chi(u) = 1$  und  $\chi(v) = 2$ . Dann gilt*

$$|\{u' \in N_G(u) : \chi(u') = 3\}| \leq |\{v' \in N_G(v) : \chi(v') = 1\}| - 1.$$

**Beweis:** Wir betrachten die Nachbarschaftsbijektion  $\Phi := \Phi_{u,v}$  aus Definition 9. Sei  $u'$  ein Nachbar von  $u$  mit Farbe 3. Da  $\Phi(u')$  sowohl Nachbar von  $u'$  als auch von  $v$  ist, besitzt  $\Phi(u')$  Farbe 1. Der Knoten  $u$  ist ebenfalls ein Nachbar von  $v$  mit Farbe 1. Wegen  $u = \Phi(v)$  und  $\chi(v) = 2 \neq 3$  ist dieser von anderer Gestalt als die bisher betrachteten Nachbarn von  $v$  mit Farbe 1. Somit folgt die Behauptung. ■

Eine 3-Färbung eines  $(0, 2)$ -Graphen besitzt daher folgende Eigenschaft.

**Satz 80:** *Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph,  $(v_1, \dots, v_l, v_1)$  ein Kreis in  $G$  sowie  $v_0 := v_l$  und  $v_{l+1} := v_1$ . Dann gibt es für jede 3-Färbung  $\chi$  einen Index  $i \in \{1, \dots, l\}$  mit  $\chi(v_{i-1}) = \chi(v_{i+1})$ .*

**Beweis:** Ist  $l$  nicht durch 3 teilbar, ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Wir betrachten daher nur durch 3 teilbare Kreislängen  $l$ . Dazu gehen wir indirekt vor und nehmen an, dass es eine 3-Färbung  $\chi$  von  $G$  gibt mit  $\chi(v_{i-1}) \neq \chi(v_{i+1})$  für alle Indizes  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Ohne Einschränkung gilt  $\chi(v_i) = i \pmod{3}$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Wir setzen  $V_i := \{v \in N_G(v_i) : \chi(v) = i - 1 \pmod{3}\}$ . Nach Lemma 79 gilt dann  $|V_i| \leq |V_{i+1}| - 1$  für alle  $i = 1, \dots, l$ , was wegen  $\sum_{i=1}^l |V_i| \leq \sum_{i=1}^l |V_{i+1}| - l = \sum_{i=1}^l |V_i| - l$  ein Widerspruch ist. ■

Folgerung 14 besagt unter anderem, dass planare 3-färbbare  $(0, 2)$ -Graphen dreiecksfrei sind. Satz 80 besagt unter anderem, dass das für alle 3-färbbaren  $(0, 2)$ -Graphen gilt.

**Definition 81 (Rektagraph)** (vgl. [Neu82]): *Ein dreiecksfreier  $(0, 2)$ -Graph heißt Rektagraph.*

**Korollar 82:** *Jeder 3-färbbare  $(0, 2)$ -Graph ist ein Rektagraph.*

Bevor wir das letzte Resultat dieses Abschnittes festhalten, führen wir noch den Begriff des *gerichteten Graphen* ein. Dies ist ein Paar  $D = (V(D), A(D))$  mit einer Knotenmenge  $V(D)$  und einer Kantenmenge  $A(D) \subseteq \{(u, v) : u \neq v \in V(D)\}$ . Ein Tupel  $(u_0, \dots, u_l, u_1)$  von Knoten aus  $D$  mit  $(u_{i-1}, u_i) \in A(D)$  und  $(u_l, u_1) \in A(D)$  heißt *gerichteter Kreis* der Länge  $l + 1$ .

**Folgerung 83:** *Seien  $G$  ein  $(0, 2)$ -Graph mit mindestens zwei Knoten und  $\chi$  eine 3-Färbung von  $G$ . Dann gibt es mindestens zwei Knoten, deren Nachbarschaft bezüglich  $\chi$  einfarbig ist.*

**Beweis:** Sei  $\chi$  eine Färbung von  $G$  mit den Farben 1, 2 und 3. Wir richten die Kanten von  $G$  auf folgende Weise, um einen gerichteten Graphen  $D = (V(D), A(D))$  zu erhalten:  $V(D) := V(G)$  und  $(u, v) \in A(D) :\iff \{u, v\} \in E(G)$  und  $\chi(v) - \chi(u) \equiv 1 \pmod{3}$ . Da  $\chi$  eine 3-Färbung von  $G$  ist, wird jeder Kante  $\{u, v\}$  von  $G$  genau eine Kante  $(u, v)$  oder  $(v, u)$  in  $D$  zugeordnet. Nach Satz 80 enthält  $D$  keine gerichteten Kreise. Das bedeutet, dass die Knoten von  $D$  so mit  $1, \dots, n$  durchnummeriert werden können, dass gilt: Ist  $(i, j)$  eine Kante von  $D$ , so folgt  $i < j$ . Benennen wir die Knoten von  $G$  auf dieselbe Weise um, dann besitzen alle Nachbarn von Knoten 1 beziehungsweise von Knoten  $n$  dieselbe Farbe (bezüglich  $\chi$ ). ■

# 7 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Diplomarbeit war es weder möglich, Payans Vermutung zu beweisen noch zu widerlegen.

Neben verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten für  $(0, 2)$ -Graphen, die wir ausführlich in Kapitel 4 studiert haben, wurden unter anderem folgende Resultate bewiesen:

1. Für planare Graphen ist Payans Vermutung korrekt. (Folgerung 20)
2. Gibt es einen 3-chromatischen  $(0, 2)$ -Graphen, dann gibt es unendlich viele. (Satz 30, Satz 31)
3. Jeder 3-färbbare  $(0, 2)$ -Graph ist ein Rektagraph. (Korollar 82)

Offen bleibt, ob die Ansätze aus Abschnitt 4.3.2 und Abschnitt 4.4 ein Gegenbeispiel zu Payans Vermutung liefern können.

# Literaturverzeichnis

- [Bro06] A. E. Brouwer. Classification of small  $(0, 2)$ -graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series A* 113, 1636-1645, 2006
- [BÖ09] A. E. Brouwer, P. R. J. Östergård. Classification of the  $(0, 2)$ -graphs of valency 8. *Discrete Mathematics* 309, 532-547, 2009
- [Die06] R. Diestel. *Graphentheorie* (Elektronische Ausgabe 2006). Springer-Verlag Heidelberg 1996, 2000, 2006
- [Fár48] I. Fáry. On straight-line representation of planar graphs. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 11, 229-233, 1948
- [Gör09] F. Göring. Private Kommunikation, 2009
- [Grö59] H. Grötzsch. *Zur Theorie der diskreten Gebilde*, Mitteilung VII: Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe 8, 109-120, 1959
- [Ham50] R. W. Hamming. Error detecting and error correcting codes. *The Bell System Technical Journal* XXVI, 147-160, 1950
- [Lov75] L. Lovász. Spectra of graphs with transitive groups. *Periodica Mathematica Hungarica* 6, 191-195, 1975
- [Mul79] H. M. Mulder.  $(0, \lambda)$ -graphs and  $n$ -cubes. *Discrete Mathematics* 28, 179-188, 1979
- [Mul80] H. M. Mulder. The interval function of a graph. *Mathematical Centre Tracts* 132, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980
- [Neu82] A. Neumaier. Rectagraphs, diagrams, and Suzuki's sporadic simple group. *Algebraic and geometric combinatorics*, 305-318, North-Holland Mathematics Studies 65, North-Holland, Amsterdam, 1982

*Literaturverzeichnis*

- [Pay92] C. Payan. On the chromatic number of cube-like graphs. *Discrete Mathematics* 103, 271-277, 1992
- [Sok87] M. Sokolová. The chromatic number of extended odd graphs is four. *Časopis pro pěstování matematiky* 112, 308-311, 1987
- [Wag37] K. Wagner. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Mathematische Annalen* 114, 570-590, 1937